УДК 517.624.2 https://doi.org/10.51301/vest.su.2021.i6.21

[1]З.С. Утемаганбетов, [1]Г.Н. Нигметова, [1]Б.Т. Урбисинова, [1]Р.Б.Асилбаева, [2]М.А.Тукибаева*
[1] Yessenov University, Актау, Казахстан
[2]Университет иностранных языков и деловой карьеры, Алматы, Казахстан
*e-mail: makhabbat.tukibaeva@mail.ru

МЕТОД ПЕРЕНОСА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ (АЛГОРИТМ ТОМАСА) ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Предложен новый алгоритм, который является альтернативой методу прогонки для численного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с закрепленными краевыми условиями. Алгоритм имеют более широкую область применимости, чем известный метод прогонки и работает как при положительных, так и при отрицательных коэффициентах уравнения. Основной целью данной работы является получение рекурентных формул аналогичных формулам прогонки, для численного решения краевой задачи дифференциальных уравнений второго порядка. Наиболее важным является вопрос о наличии прогоночных формул, когда коэффициент при решении в уравнении имеет отрицательный знак или является знакопеременным. В работе показана согласованность и вычислительная устойчивость разностных схем представляемых посредством предлагаемых рекуррентных формул. Результаты, полученные в данной статье, подтверждаются расчетными данными.

Ключевые слова: метод прогонки, смешанные краевые задачи, трехдиагональная матрица, вычислительная погрешность, граничные условия, метод конечных разностей, узловые точки, метод немонотонной прогонки.

Введение. Применения широко распространенных конечно-разностных, проекционно-сеточных и многих других методов для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, в конечном этапе решения приводит к применению метода прогонки. Поэтому метод прогонки занимает важное место среди наиболее часто применяемых численных методов.

Метод прогонки, предназначен для решения разностных уравнений, которые получаются при написании разностных соотношений для дифференциальных уравнений. Вычислительная устойчивость метода прогонки гарантируется при условии, когда имеет место свойство диагонального преобладания матрицы системы разностных уравнений. В свою очередь, для соответствующих дифференциальных уравнений это свойство означает, что коэффициент при искомом решении должен быть положительным. Методы прогонки при условии, когда вышеуказанное свойство устойчивости выполнено хорошо зарекомендовали себя как широко применяемое средство численного решения краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка. К данному моменту существуют различие в оценках условий устойчивости метода прогонки (вплоть до решительной критики, [1], но, тем не менее, этот класс методов в целом положительно принят и является одним из основных инструментов специалистов-вычислителей, о чем свидетельствует описание этих методов в учебниках. Несомненно, решающую роль сыграла более чем, 50-летняя практика применения методов прогонки к решению конкретных задач. К сожалению, строгого обоснования применимости методов этого класса желает оставлять лучшего, так как в совокупности строгих результатов имеются существенный пробел. Например, в работе [2] приводится подробный анализ формул прогонки и излагается о трудностях при замыкании вычислительного алгоритма, как следствие того, что формулы прямой прогонки в начальной точке ведут себя как обратная величина к шагу сетки.

Примеры, когда метод прогонки дает неудовлетворительные результаты при решении краевых задач, имеются множество в разных источниках. В частности, таких примеров можно найти в [3.4]. Причем неудовлетворительный результат может получиться и в том случае, когда все условия применимости метода прогонки выполнены.

Такая неблагоприятная ситуация может быть следствием накопления вычислительных погрешностей. При расчетах с достаточно крупными шагами h, влиянием вычислительной погрешности на решение часто можно пренебречь. Однако все же стоит иметь в виду, что при решении системы разностных уравнений соответствующей краевой задаче методом прогонки может происходить накопление вычислительной погрешности. Известно, что при $h \to 0$, вычислительная погрешность может возрастать пропорционально $1/h^2$. Таким образом, при достаточно малых значениях шага h возможна катастрофическая потеря точности. Такая недопустимая потеря точности происходит из-за того, что уже на этапе составления разностных уравнений происходит существенное искажение искомого решения [3]. То есть, такая ситуация является следствием недостатка метода конечных разностей, а не следствием метода прогонки, что полностью соответствует изложенному в книге Бабенко К.И. [1].

Метод классической прогонки предназначен для решения конечно-разностных уравнений, матрицы которых имеет трехдиагональный вид. Но, если для таких матриц не выполнены условия диагонального преобладания, то обоснование вычислительной устойчивости метода прогонки не представляется возможным. Следовательно, применение классической прогонки для решения таких систем не совсем правомерно. Поэтому для таких случаев напрашивается применения метода «немонотонной прогонки», который является методом Гаусса с выбором главного элемента. Однако при попытке применить «немонотонную прогонку» может быть нарушен трёхдиагональность исходной матрицы, поэтому «немонотонную прогонку» не применяет для ленточных матриц [5]. Анализ устойчивости счета при выборе ведущего элемента и возможность недопустимого роста некоторых коэффициентов необходимых для счета приведен в работе [4].

На основе вышеприведенных обстоятельств можно придти к выводу, что следовало бы, иметь в арсенале вычислительной математики серию рекуррентных формул, аналогичных формулам прогонки но, тем не менее, которая представляла бы собой некую альтернативу к формулам классической прогонки. При этом желательно, чтобы предлагаемые формулы были вычислительно устойчивыми для широкого класса задач, чем это имеет место для известных вариантов методов прогонки.

Цель настоящей работы - получение рекуррентных формул аналогичных формулам прогонки, для численного решения краевой задачи дифференциальных уравнений второго порядка, когда метод прогонки может привести к неутешительным результатам. В частности, особенно важным является вопрос о наличии прогоночных формул, когда коэффициент при решении в уравнении (имеет отрицательный знак или является знакопеременным) и граничные условия не удовлетворяет условиям устойчивости широко применяемого метода прогонки.

Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$(k(t)y'(t))' - q(t)y(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями

$$k(0)y'(0) - \alpha_0 y(0) = \beta_0 \tag{2}$$

$$k(1)y'(1) - \alpha_1 y(1) = \beta_1 \tag{3}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ - действительные числа, $\beta_0, \beta_1 \in \Re = \,]-\infty, +\infty[$.

Будем считать, что коэффициенты уравнения $f(t), q(t)$ – непрерывны на отрезке $[0,1]$, коэффициент $k(t)$ непрерывно дифференцируем на $[0, \ 1]$, и $k(t) \ge k_0 > 0$.

Для исследования вопросов численного решения данной краевой задачи разобьем отрезок $[0, \ 1]$ на N частей, введением узловых точек $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$.

Если обозначить через h расстояния между узлами (шаг сетки), то $h=\frac{1}{N}$, $t_n=\frac{n}{N}$, ($n=0,2,\ldots,N$), где N - целое число отрезков разбиения (шаг сетки может быть и неравномерным).

В дальнейшем будем обозначать через $y(t_n)$ значение точного решение краевой задачи (1) - (3) в точке t_n, а через y_n и y'_n - соответствующее приближенное решение и ее производную, построенное с помощью рассматриваемого численного метода. Также для удобства будем пользоваться обозначениями вида

$$k(t_n)=k_n,\quad \mu_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)dt,\quad \sigma_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt,\quad l_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{dt}{k(t)},\qquad n=1,2,\ldots N.$$

Необходимо получить рекуррентные прогоночные формулы численного решения краевой задачи (1)-(3) и исследовать их на предмет согласованности и устойчивости, и тем самым указать условия применимости полученных формул.

3. Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1) – (3), в случае когда $q(t)\ge 0$, $\alpha_0>0$.

Описание алгоритма.

В случае когда $q(t)\ge 0$, $\alpha_0>0$**,** для численного решения краевой задачи (1) – (3) могут быть использованы следующие рекуррентные формулы:

Формулы прямого хода:

$$a_0=\alpha_0,\qquad a_n=\frac{a_{n-1}+\mu_n}{1+a_{n-1}l_n}, \tag{4}$$

$$v_0=\beta_0,\qquad v_n=\frac{v_{n-1}+\sigma_n}{1+a_{n-1}l_n} \tag{5}$$

для всех $n=1,2,\ldots N$.

Формула обратного хода:

$$y_N=\frac{\beta_1-v_N}{a_N-\alpha_1},\qquad y_{n-1}=\left(1-\frac{ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}\right)y_n-\frac{hv_n}{k_n(1+a_nl_n)}, \tag{6}$$

для всех $n=N,N-1,\ldots 1.$, при условии, что $a_N\ne\alpha_1$.

Доказательство согласованности. Для этого покажем, что при $h\to 0$, из приведенных рекуррентных формул (4) - (6) можно получить задачу Коши для трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая в свою очередь, является эквивалентной исходной краевой задаче (1) – (3).

Из формулы (4) имеем $a_n+a_na_{n-1}l_n=a_{n-1}+\mu_n$ или $a_n-a_{n-1}=\mu_n-a_na_{n-1}l_n$. Поделив обе части этого выражение на h и переходя к пределу при $h\to 0$, можно получить дифференциальное уравнение который носит название Рикатти

$$a'(t)+\frac{1}{k(t)}a^2(t)=q(t),\qquad a(0)=\alpha_0 \tag{7}$$

Рассуждая совершенно аналогично, можем убедиться в том, что дифференциальными аналогами соответствующим рекуррентным формулам (5) - (6) являются следующие дифференциальные уравнения

$$v'(t)+\frac{1}{k(t)}a(t)v(t)=f(t)\qquad v(0)=\beta_0, \tag{8}$$

$$k(t)y^{'}(t)-a(t)y(t)=v(t) \qquad y(1)=\frac{v(1)-\beta_1}{\alpha_1-a(1)} \tag{9}$$

при условий, что $a(1)\neq\alpha_1$, где последнее уравнение системы интегрируется справа налево. Обоснование того, что решение $y(t)$ полученной дифференциальной системы также является решением краевой задачи (1)-(3) можно найти в книгах [2] (стр. 439),[6] (стр. 34-35). Там же проводится некоторый анализ этой системы, тем не менее, соответствующие к ним дискретные формулы для численного решения не приводится. Данный пункт настоящей статьей, в определенном смысле восполняет этот пробел.

Доказательство устойчивости. Теперь убедимся, в том, что вышеприведенные рекуррентные формулы являются вычислительно устойчивыми. Заметим, что по условию $\mu_n=\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}q(t)dt\geq 0,\quad \alpha_0>0$ и отсюда, как видно из формулы (4) следует, что $a_n\geq 0$, значит, выполняется неравенство $\dfrac{1}{1+a_{n-1}l_n}\leq 1$, для всех $n=1,2,\ldots N$.

Это обстоятельство обеспечивает устойчивость счета по формулам (4) – (5). В формуле (6) множитель при y_n может быть преобразован к виду

$$1-\frac{ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}=\frac{k_n(1+a_nl_n)-ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}=\frac{k_n\left(1+\dfrac{ha_n}{k_n}+O(h^2)\right)-ha_n}{k_n(1_n+a_nl_n)}=\frac{1}{1+a_nl_n}+O\left(h^2\right)$$

Поскольку, по условию $l_n=\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\dfrac{dt}{k(t)}dt\geq 0$ и $a_n\geq 0$, то выполняется неравенство $\dfrac{1}{1+a_nl_n}\leq 1$ для всех $n=N,N-1,\ldots 1.$, что гарантирует устойчивость счета по формуле обратного хода (6). Заметим, что приведенные рекуррентные формулы (4) - (6) аппроксимирует исходную краевую задачу с первым порядком точности. При необходимости, могут быть выписаны аналогичные к этим формулам рекуррентные формулы, которые обеспечивают более высокую точность, чем приведенные, но целью этого пункта данной работы является обоснования корректности формул (4)-(6), которые являются основой при построении алгоритма для численного решения задачи (1)-(3), в случае когда $q(t)\leq 0$.

Сведение краевой задачи (1) - (3) к задаче Коши (7) – (9) и последующее ее решение называется методом дифференциальной прогонки или методом простой факторизации и в том случае когда, в уравнении (1) $q(t)\geq 0$ был предметом исследования многих авторов. Среди них Гельфанд, Локуциевский, Марчук, Ридли и т.д. К развитию метода прогонки применительно к задачам разного характера внесли весомые вклады многие видные математики. Среди них: Абрамов А.А., Бахвалов Н.С., Владимиров В.С., Воеводин А.Ф., Годунов С.К., Отелбаев М.О., Дегтярев Л.М., Сафронов И.Д. и другие. В результате в данный момент существует много модификаций метода прогонки такие как: классическая, потоковая, циклическая, ортогональная, немонотонная прогонки. Все они предназначены для решения систем уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач, и являются модификациями метода классической прогонки, и каждый из них может быть выбран для решения конкретного класса задач.

Численный пример.

В качестве численного примера рассмотрим краевую задачу $y^{''}(t)-25y(t)=0,\ 0\leq t\leq 1,$ $y'(0)-y(0)=1,\ y'(1)-y(1)=1$. В условиях этого примера; $k(t)\equiv 1,\ q(t)\equiv 25,\quad f(t)\equiv 0$ $\alpha_0=\alpha_1=\beta_0=\beta_1=1$. При численном расчете с шагом $N=100$, по формулам (4)-(6), абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta=0.003$.

4. Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1) – (3) в случае когда $q(t) \le 0$, $\alpha_0 < 0$.

Описание алгоритма.

Организация прямого хода.

Счет начнем по следующим формулам, которых назовем формулами прямого хода для отрицательного «входа»

$$b_n = \frac{b_{n-1} + l_n}{1 + b_{n-1}\mu_n}, \ b_0 = \frac{1}{\alpha_0}; \qquad d_n = \frac{d_{n-1} + b_{n-1}\sigma_n}{1 + b_{n-1}\mu_n}, \ d_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}; \qquad n = 1,....\theta_1.$$

(10) где θ_1,- такой номер, что для всех $n = 1,....\theta_1 - 1$, значения $b_n \le 0$, и $b_{\theta_1} > 0$. То есть, здесь тот номер n, для которого впервые становится, $b_{\theta_1} > 0$ обозначен θ_1 (если такого номера θ_1, не существует, то расчет по этим формулам будет вестись до правого конца отрезка). Формулы (10) предназначены для отрицательного «входа», поэтому положим $a_{\vartheta_1} = \dfrac{1}{b_{\theta_1}} > 0$, $v_{\theta_1} = \dfrac{d_{\theta_1}}{b_{\vartheta_1}}$, и счет начнем по следующим формулам, которых назовем формулами прямого хода для положительного «входа»

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \mu_n}{1 + a_{n-1}l_n}, \quad a_{\vartheta_1} = \frac{1}{b_{\theta_1}}; \qquad v_n = \frac{v_{n-1} + \sigma_n}{1 + a_{n-1}l_n}, \ v_{\theta_1} = \frac{d_{\theta_1}}{b_{\vartheta_1}}; \ n = \theta_1 + 1,....\theta_2. \qquad (11)$$

где θ_2,- такой номер шага, что для всех $n = \theta_1 + 1,....\theta_2 - 1$. значения $a_n \ge 0$, и $a_{\theta_2} < 0$. Так как входное значение a_n, для формул (11) на номере θ_2 становится отрицательным, с помощью соотношений $b_{\theta_2} = \dfrac{1}{a_{\theta_2}}$, $d_{\theta_2} = \dfrac{v_{\theta_2}}{a_{\theta_2}}$ переходим к формулам (10). То есть счет продолжим по формулам прямого хода для отрицательного «входа»

$$b_n = \frac{b_{n-1} + l_n}{1 + b_{n-1}\mu_n}, \ b_{\theta_2} = \frac{1}{a_{\theta_2}}; \quad d_n = \frac{d_{n-1} + b_{n-1}\sigma_n}{1 + b_{n-1}\mu_n}, \ d_{\theta_2} = \frac{v_{\theta_2}}{a_{\theta_2}}; \qquad n = \theta_2 + 1,....\theta_3.$$

где θ_3,- такой номер, что для всех $n = \theta_2 + 1,....\theta_3 - 1.$, значения $b_n \le 0$, и $b_{\theta_3} > 0$ (если такого номера θ_3, не существует, то расчет по этим формулам будет вестись до правого конца отрезка). Далее, при необходимости вышеописанная процедура повторяется и в следующих возможных точках перехода. Таким образом, до завершения прямого хода могут быть осуществлены множества переходов, между формулами прямых ходов для отрицательного и положительного «входов». Количество таких переходов зависит от величины функции $q(t)$.

Если обозначим и θ_k - тот номер, на котором последний раз совершался переход из формул (10) к формулам (11) или наоборот, то множества индексов, представляющий собой «номера шагов перехода» можно обозначить через $\{\theta_1, \theta_2, ...\theta_k\}$. И соответственно, множество индексов от 1 до N, разбивается на подинтервалы; $[0, \theta_1]$, $[\theta_1 + 1, \theta_2]$, $[\theta_3 + 1, \theta_4]$,..... $[\theta_{k-2} + 1, \theta_{k-1}]$, $[\theta_{k-1} + 1, \theta_k]$, $[\theta_k + 1, N]$.

В терминах введенных обозначений можно утверждать, что переход из (10) к (11) и обратно, осуществляется с помощью соотношений $a_{\theta_j} = \dfrac{1}{b_{\theta_j}}$, $v_{\theta_j} = \dfrac{d_{\theta_j}}{b_{\theta_j}}$, здесь θ_j - номер индекса, начиная с которого осуществляется указанный переход ($j = 1,2,...k.$), где j - номер перехода.

Итак, поочередное использование формул (10) и (11) прямого хода для отрицательного и для положительного «входов», позволяет вести расчет до правого конца рассматриваемого отрезка и тем самым завершить «прямой ход». При этом на последнем отрезке, где ведется прямой ход расчета, то есть на $[\theta_k+1, N]$, возможны следующие два взаимоисключающих случая:

1 расчет ведется по формулам (10) прямого хода для отрицательного «входа».

2 расчет ведется по формулам (11) прямого хода для положительного «входа.

Организация обратного хода

В первом случае, положим $z_N = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1 d_N}{1-\alpha_1 b_N}$ (при условии, что $b_N \neq \dfrac{1}{\alpha_1}$) и начнем обратный расчет по следующим формулам, которых назовем формулами обратного хода для отрицательного «входа»

$$z_{n-1} = \frac{z_n + \mu_n d_{n-1} - \sigma_n}{1 + b_{n-1}\mu_n}, \qquad y_{n-1} = b_{n-1} z_{n-1} - d_{n-1}; \qquad n = N, N-1, \ldots \theta_k + 2,\ \theta_k + 1. \quad (12)$$

Далее, начиная с шага θ_k, продолжим счет, по следующей рекуррентной формуле которого удобно назвать формулой обратного хода для положительного «входа».

$$y_{n-1} = \left(1 - \frac{ha_n}{k_n(1+a_n l_n)}\right) y_n - \frac{hv_n}{k_n(1+a_n l_n)}; \qquad n = \theta_k, \ldots \theta_{k-1}+2,\ \theta_{k-1}+1. \quad (13)$$

Для продолжения расчета на множестве индексов $[\theta_{k-1},\ \theta_{k-2}+1]$, в обратном направлении, потребуется переход к формулам обратного хода для отрицательного «входа» (12). Последние два значения $y_{\theta_{k-1}+1}$ и $y_{\theta_{k-1}}$ рассчитанные по формуле (13), позволяет найти значение $z_{\theta_{k-1}}$ по формуле $z_{\theta_{k-1}} = \dfrac{y_{\theta_{k-1}+1} - y_{\theta_{k-1}}}{hk_{\theta_{k-1}}}$.

Далее, для всех индексов от $n = \theta_{k-1}$, до $n = \theta_{k-2}+1$, расчет ведется по формулам (12). На следующем интервале $[\theta_{k-2}, \theta_{k-3}+1]$, расчет осуществляется справа налево по формулам (13). Таким образом, чередуя формулы обратного хода для отрицательного «входа» (12) и положительного «входа» (13), могут быть найдены все искомые значения y_n, $(n = N-1, \ldots 1.)$. При этом, где потребуется перейти из (13) к формулам (12), переход осуществляется по формуле $z_{\theta_j} = \dfrac{y_{\theta_j+1} - y_{\theta_j}}{hk_{\theta_j}}$, где θ_j - номер индекса, начиная с которого осуществляется переход $(j = k, k-1, \ldots 0.)$, j - номер перехода.

Во втором случае, полагается, что $y_N = \dfrac{\beta_1 - v_N}{a_N - \alpha_1}$, (при условий $a_N \neq \alpha_1$) и расчет продолжается по формулам (13) то есть, по формулам обратного хода для положительного «входа» от индекса N, до индекса θ_k+1. На индексе θ_k, где необходимо перейти к (12), вычисляем значение по формуле; $z_{\theta_k} = \dfrac{y_{\theta_k+1} - y_{\theta_k}}{hk_{\theta_k}}$, и расчет продолжится по формуле (12) для всех индексов интервала $[\theta_k, \theta_{k-1}+1]$, справа налево. Далее, организуя данный численный процесс обратного хода совершенно аналогично предыдущему случаю, то есть, чередуя формулы обратных ходов для отрицательного» и положительного «входа», можно получить все интересующие значения y_{n-1}, $(n = N, N-1, \ldots 1.)$.

Доказательство согласованности. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$b'(t)+q(t)b^2(t)=\frac{1}{k(t)}, \qquad b(0)=\frac{1}{\alpha_0}. \tag{14}$$

$$d'(t)+q(t)b(t)d(t)=b(t)f(t), \qquad d(0)=\frac{\beta_0}{\alpha_0};. \tag{15}$$

$$z'(t)-q(t)b(t)z(t)=f(t)-q(t)d(t), \qquad z(1)=\frac{\beta_1-\alpha_1 d(1)}{1-\alpha_1 b(1)}. \tag{16}$$

при условии, что $b(1)\neq\frac{1}{\alpha_1}$**.** Здесь последнее уравнение системы интегрируется справа налево**.** Если известно, решение этой системы, то решение исходной краевой задачи запишется в виде

$$y(t)=b(t)z(t)-d(t) \tag{17}$$

Действительно, если продифференцируем это выражение и воспользуемся уравнениями системы (14)–(16), то получим $y'(t)=\frac{z(t)}{k(t)}$ или $k(t)y'(t)=z(t)$**.** Значит

$(k(t)y'(t))'=z'(t)=f(t)-q(t)d(t)+q(t)b(t)z(t)=f(t)+q(t)\big(b(t)z(t)-d(t)\big)=f(t)+q(t)y(t)$

то есть получим исходное уравнение. Если теперь положим $b(0)=\frac{1}{\alpha_0}$, $d(0)=\frac{\beta_0}{\alpha_0}$; то краевое условие на левом конце отрезка выполняется автоматически. Для определение начального значение для $z(t)$, в точке $t=1$ имеем $y(t)=b(1)z(1)-d(1)$ и $y'(1)=\frac{z(1)}{k(1)}$. Отсюда с учетом краевого условие (3) получается $z(1)=\frac{\beta_1-\alpha_1 d(1)}{1-\alpha_1 b(1)}$ при условий, что $b(1)\neq\frac{1}{\alpha_1}$**.** Тем самым, было показано, что функция $y(t)=b(t)z(t)-d(t)$ является решением краевой задачи (1)-(3), где $b(t)$, $d(t)$, $z(t)$ решение дифференциальной системы (14) – (16). Обратно, из краевой задачи (1)-(3), можно получить систему (14)-(16), следующим образом. Искомое решение будем искать в виде $y(t)=b(t)z(t)-d(t)$, где $b(t)$, $d(t)$- пока неизвестные функции (прогоночные коэффициенты), для которых необходимо получить дифференциальные уравнения. Тогда если в уравнении (1) положим $k(t)y'(t)=z(t)$, то получим уравнение (16). Далее, с учетом только, что введенных соотношений и уравнения (16) будем иметь

$$k(t)y'(t)=k(t)[(b(t)z(t)-d(t)]'=k(t)[b'(t)z(t)+b(t)z'(t)-d'(t)]=$$

$$k(t)[k(t)b'(t)+k(t)q(t)b^2(t)]y'(t)+q(t)b(t)d(t)-b(t)f(t)+d'(t)$$

После приведения подобных членов имеем равенство

$$[k(t)b'(t)+k(t)q(t)b^2(t)-1]y'(t)+q(t)b(t)d(t)-b(t)f(t)+d'(t)=0.$$

Приравнивая коэффициенты к нулю при $y'(t)$ и единице, получим два дифференциальные уравнения для прогоночных коэффициентов, то есть уравнения (14)-(15).

Из выражение (17) при $t=0$ и из краевого условия на левом конце получим $z(0)(1-\alpha_0 b(0))+\alpha_0 d(0)=\beta_0$. Пологая здесь $b(0)=\frac{1}{\alpha_0}$, получаем $d(0)=\frac{\beta_0}{\alpha_0}$;.

Начальное значение для $z(t)$ получается аналогично. Тем самым, было показано, что краевая задача (1)-(3) и система дифференциальных уравнений (14)-(16) имеют одинаковые решение.

В системе (14) – (16) можно произвести следующую замену в тех точках, пологая, что функция $b(t)$, нигде не обращается в ноль

$$a(t)=\frac{1}{b(t)},\quad v(t)=\frac{d(t)}{b(t)},\quad y(t)=b(t)z(t)-d(t). \tag{18}$$

В результате придем к другой системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$a'(t)+\frac{1}{k(t)}a^2(t)=q(t) \tag{19}$$

$$v'(t)+\frac{1}{k(t)}a(t)v(t)=f(t) \tag{20}$$

$$k(t)y'(t)-a(t)y(t)=v(t) \tag{21}$$

которая, как и предыдущая система является эквивалентной исходной краевой задаче (что, может быть показано, аналогично тому, как это было сделано с системой (14)-(16)). Начальные значения для системы дифференциальных уравнений (19)-(21) определяются из соотношений (18). Как видно из (18), при необходимости может быть, осуществлен обратный переход от системы (19)-(21) к (14)-(16), с помощью соотношений

$$b(t)=\frac{1}{a(t)},\quad d(t)=\frac{v(t)}{a(t)},\quad z(t)=a(t)y(t)+v(t).$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, в рекуррентных формулах $\{b_n,d_n\}$ из (10) получаем дифференциальные уравнения (14)-(15). Аналогично, переход к пределу при $h\to 0$ в рекуррентной формуле (12) дает уравнение (16). Точно также, можем убедиться в том, что дифференциальными аналогами соответствующим рекуррентным формулам (11), (13) являются дифференциальные уравнения представляемой системой (19) - (21). Обоснование того, что решение $y(t)$ каждой из систем (14)-(16) и (19)-(21) является и решением краевой задачи (1)-(3) было приведено выше.

Доказательство устойчивости. По условию $\mu_n=\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} q(t)dt\le 0,$ и по построению алгоритма, в формулах для $\{b_n,d_n,z_n\}$ значение $b_{n-1}\le 0$, и значит, выполняется неравенство $\frac{1}{1+b_{n-1}\mu_n}\le 1$. Это обстоятельство обеспечивает устойчивость счетам по формулам (10) и (12).

Аналогично устойчивость счета по формулам (11) гарантирует неравенство $\frac{1}{1+a_{n-1}l_n}\le 1$, которое всегда выполняется в силу того, что по условию задачи имеет место неравенство $l_n=\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{dt}{k(t)}>0$ и по условию алгоритма $a_{n-1}\ge 0$. Таким образом, выполнения условия устойчивости видно во всех формулах непосредственно, кроме формулы (13). В формуле (13), множитель при y_n может быть преобразован к виду

$$1-\frac{ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}=\frac{k_n(1+a_nl_n)-ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}=\frac{k_n\left(1+\frac{ha_n}{k_n}\right)-ha_n}{k_n(1+a_nl_n)}+O\left(h^2\right)=\frac{1}{1+a_nl_n}+O\left(h^2\right)$$

Поскольку, по построению алгоритма $a_n\ge 0$, то выполняется неравенство $\frac{1}{1+a_nl_n}\le 1$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что вышеописанный алгоритм является корректным, если выполнено условие $b_N\ne\frac{1}{\alpha_1}$, при реализации первого из указанных возможных случаев. А условие $a_N\ne\alpha_1$, гарантирует корректность алгоритма при реализации второго из случаев на конце расчетного отрезка. Если эти условия не выполнены, то можно начать расчет с правого конца отрезка то есть организовывать процесс «встречной прогонки».

5. Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1) – (3) в случае когда $q(t) \le 0$, $\alpha_0 > 0$.

В этом случае, расчет начинается по формулам (11) с начальными значениями $a_0 = \alpha_0$, $v_0 = \beta_0$ и далее процесс численного решения организуется аналогично предыдущему случаю, то есть когда $q(t) \le 0$, $\alpha_0 < 0$, который подробно было изложено выше.

Численные примеры

1. В качестве численного примера рассмотрим краевую задачу $y''(t) + 81y(t) = 0,\ 0 \le t \le 1$, $y'(0) + 10y(0) = 10$, $y'(1) - y(1) = 1$. В условиях этого примера; $k(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv -81$, $f(t) \equiv 0$ $\alpha_0 = -10$, $\alpha_1 = 1$ $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 1$. При численном расчете с шагом $N = 100$, по вышеуказанному алгоритму, абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta = 0.436$. Такая низкая точность является следствием того, что в этом примере функция $q(t)$ и количество шагов N - величины одного порядка. Тем не менее, такая точность не противоречит гарантируемому первому порядку точности излагаемого метода. А при расчете с шагом $N = 1000$, та же самая погрешность равна $\delta = 0.058$.

2. В качестве следующего численного примера рассмотрим краевую задачу $y''(t) + 81y(t) = 0,\ 0 \le t \le 1$, $y'(0) + 100y(0) = 10$, $y'(1) - y(1) = 1$. В условиях этого примера; $k(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv -81$, $f(t) \equiv 0$ $\alpha_0 = 100$, $\alpha_1 = 1$ $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 1$.. При численном расчете с шагом $N = 100$, по вышеуказанному алгоритму, абсолютная величина наибольшей погрешности равна $\delta = 0.085$. А при расчете с шагом $N = 1000$, та же самая погрешность равна $\delta = 0.021$.

6. Рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1) – (3) в случае, когда $q(t)$ является знакопеременной функцией.

Так как, в рамках данного алгоритма происходит перенос краевых условии в выбранные узловые точки внутри рассматриваемого отрезка, поэтому на любой из узловых точек $t_k \in [0, 1]$ могут быть реализованы следующие возможные сценарий:

1) $a_{k-1} \ge 0,\ q(t) \ge 0$. В этом случае, может быть применен алгоритм указанный в пункте (3). А также применимы формулы классической прогонки.

2) $a_{k-1} \le 0,\ q(t) \ge 0$. Тогда, если $|a_{k-1}| \le \left|\sqrt{q_k}\right|$, то начиная с – шага k счет ведется слева направо по формулам (11), но если $|a_{k-1}| > \left|\sqrt{q_k}\right|$, то по формулам (10). В рамках вышеуказанных условий, как следует из дифференциального аналога этих формул (формулы (14), (19)) происходит резкий монотонный рост значений a_n и b_n, и в результате за «малое» количество шагов они становятся положительными. И значит, для формул (10) - (11), условие устойчивости нарушается только на «малом» количестве шагов, что не влияет на результаты конечного счета. Обратный счет по этим формулам осуществляется, как указано в пункте (4).

3) $a_{k-1} < 0,\ q(t) \le 0$. Расчет происходит по алгоритму, изложенному в пункте (4).

4) $a_{k-1} > 0,\ q(t) \le 0$. Расчет происходит по алгоритму, изложенному в пункте (5).

Заключение. В данной работе предложены рекуррентные формулы для численного решения краевой задачи (1)-(3), которые имеют более широкую область применимости, чем метод прогонки, при решении краевых задач дифференциальных уравнений второго порядка. Формулы применимы вне зависимости от знака коэффициента $q(t)$ при решении $y(t)$. Результаты, полученные в данной статье, подтверждаются расчетными данными.

Приведенной метод имеет первый порядок точности и является абсолютно устойчивым, то есть его устойчивость не зависит от величины шага h. Один из далеко идущих целей данной работы является изложение одношагового численного метода решения краевой задачи (1)-(3), при минимальных требованиях на условия гладкости коэффициентов уравнения. Поэтому акцент данной работы делается на вывод рабочих рекуррентных формул предоставлющих возможности работы с уравнениями с разрывными (т. е. кусочно-непрерывными) коэффициентами и в ряде случаев с коэффициентами, имеющими интегрируемые особенности. Возможности современных ЭВМ позволяет работать при достаточно малых шагах h, и тем самым методы первого порядка точности могут быть вполне пригодным рабочим инструментом обеспечивающих необходимую точность для численного решения большинства практических задач. Например, в гидродинамике с успехом используется разности «против потока» имеющий первый порядок точности. Повышения порядка точности метода предпологает существование более ограничительных условий на коэффициенты исходной краевой задачи. Если все же возникает необходимость повышения точности решения, то может быть использован метод Рунге повышения точности или другие общеизвестные методы.

Изложенный алгоритм может иметь хорошие перспективы для распараллеливания счета. Есть возможность обобщить идей метода изложенного в настоящей работе на другие типы краевых условий, а также для краевых задач для дифференциальных уравнений более высоких порядков. После небольшой модификаций представленный здесь метод может быть использован и для численного решения линейных уравнений частных производных. Ради справедливости хотелось бы отметить, что первоначальная идея вышеизложенного метода принадлежит Отелбаеву М.О. [7] и получила развитие в работах [8]-[10].

Недостатки и преимущества излагаемого здесь метода, могут быть выяснены на основе практики применения этого метода специалистами по вычислительной математике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабенко К.И. Основы численного анализа. //Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

[2] Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1973. – 654 с.

[3] Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. М.: «Высшая школа». 1994.

[4] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. - М.: Наука, 1985.

[5] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Численные методы. Книга 1, Численный анализ. М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с. - (Университетский учебник. Серия Прикладная математика и информатика).

[6] На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач: Пер. с англ.—М.: Мир, 1982—296 с.

[7] Утемаганбетов З.С., Отелбаев М.О. О численном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. //В кн.: Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики. (часть II) Алматы, 1995.

[8] Utemaganbetov Z. C. Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the First Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations. Life Science Journal 2013;10 (12s), pp 603-611.

[9] Utemaganbetov Z. C., Diyarova L. D., Nigmetova. G. N. Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the Second and Third Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations (сдан в печать). Life Science Journal 2014;11(8s)

[10] Метод переноса краевых условий численного решения 1-ой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка (Утемаганбетов З.С., Нигметова Г.Н., Урбисинова Б.Т.) Вестник КазНТУ Серия физико-математическая, №5, 2015, 493-501 бб.

REFERENCES

[1] Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza. //Moskva-Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2002.

[2] Bakhvalov N.S. Chislennye metody. - M.: Nauka, 1973. – 654 s.

[3] Amosov A. A., Dubinskii Yu. A., Kopchenova N. V. Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov. M.: «Vysshaya shkola». 1994.

[4] Il'in V.P., Kuznetsov Yu.I. Trekhdiagonal'nye matritsy i ikh prilozheniya. - M.: Nauka, 1985.

[5] Kalitkin N.N., Al'shina E.A., Chislennye metody. Kniga 1, Chislennyi analiz. M.: Izdatel'skii tsentr «Akademiya», 2013. - 304 s. - (Universitetskii uchebnik. Seriya Prikladnaya matematika i informatika).

[6] Na Ts. Vychislitel'nye metody resheniya prikladnykh granichnykh zadach: Per. s angl.—M.: Mir, 1982—296 s.

[7] Utemaganbetov Z.S., Otelbaev M.O. O chislennom metode resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka. //V kn.: Aktual'nye voprosy matematiki i metodiki prepodavaniya matematiki. (chast' II) Almaty, 1995.

[8] Utemaganbetov Z. C. Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the First Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations. Life Science Journal 2013;10 (12s), pp 603-611.

[9] Utemaganbetov Z. C., Diyarova L. D., Nigmetova. G. N. Alternative and Expanded Version of the Sweep Method for the Numerical Solution of the Second and Third Boundary Value Problem for Second-Order Linear Differential Equations (сдан в печать). Life Science Journal 2014;11(8s)

[10] Metod perenosa kraevykh uslovii chislennogo resheniya 1-oi kraevoi zadachi dlya lineinykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poryadka (Utemaganbetov Z.S., Nigmetova G.N., Urbisinova B.T.) Vestnik KazNTU Seriya fiziko-matematicheskaya, №5, 2015, 493-501 bb.

[1]Z.S. Utemaganbetov, [1]G.N. Nigmetova, [1]B.T. Urbisinova, [1]R.B.Asilbaeva, [2]M.A.Tukibayeva*
[1]Yessenov University, Aktau, Kazakhstan
[2]University of Foreign Languages and Business Career, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: makhabbat.tukibaeva@mail.ru

BOUNDARY CONDITION TRANSFER METHOD (THOMAS ALGORITHM) NUMERICAL SOLUTION OF A MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. A new algorithm is proposed, which is an alternative to the run-through method for the numerical solution of second-order linear differential equations with fixed boundary conditions. The algorithm has a wider scope of applicability than the well-known run-through method and works for both positive and negative coefficients of the equation. The main purpose of this work is to obtain recurrent formulas similar to the run-through formulas for the numerical solution of the boundary value problem of second-order differential equations. The most important question is whether there are run-through formulas when the coefficient in the solution in the equation has a negative sign or is alternating. The paper shows the consistency and computational stability of the difference schemes represented by the proposed recurrent formulas. The results obtained in this article are confirmed by the calculated data.

Keywords: sweep method, mixed boundary value problems, tridiagonal matrix, computational error, border conditions, finite difference method, nodal points, non-monotonic sweep method.

[1]З.С. Утемаганбетов, [1]Г.Н. Нигметова, [1]Б.Т. Урбисинова, [1]Р.Б.Асилбаева, [2]М.А.Тукибаева*
[1] Yessenov University, Актау, Казахстан
[2]Шет тілдер және іскерлік карьера университеті, Алматы, Қазақстан
*e-mail: makhabbat.tukibaeva@mail.ru

ЕКІНШІ РЕТТІ СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН АРАЛАС ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТІ САНДЫҚ ШЕШУДІҢ ШЕКТІ ЖАҒДАЙЛАРЫН БЕРУ ӘДІСІ (ТОМАС АЛГОРИТМІ)

Аннотация. Бекітілген шектік жағдайлары бар екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді сандық шешу үшін қуалау әдісіне балама болып табылатын жаңа алгоритм ұсынылды. Алгоритм белгілі қуалау әдісіне қарағанда кеңірек қолдану аймағына ие және теңдеудің коэффициенттері оң және теріс болуына байланыссыз жұмыс істейді. Бұл жұмыстың негізгі мақсаты екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шектік есебін сандық шешу үшін қуалау формулаларына ұқсас рекуренттік формулаларын алу болып табылады. Ең бастысы, теңдеудегі шешім коэффициенті теріс белгіге ие болған кезде немесе ауыспалы болып табылатын формулалардың болуы туралы мәселе. Жұмыста ұсынылған рекуренттік формулалар арқылы берілген айырымдық сұлбаларының үйлесімділігі мен есептеу тұрақтылығы көрсетілген. Мақаладағы алынған нәтижелер есептік деректермен расталады.

Негізгі сөздер: қуалау әдісі, аралас шекаралық есептер, үшдиагоналды матрица, есептеу қателігі, шекаралық шарттар, шекті айырым әдісі, тораптық нүктелер, бірсарынды емес қуалау әдісі.