

<sup>1</sup>А.Марасулов, <sup>2</sup>И.И.Сафаров, <sup>3</sup>Г.А.Абдраимова\*, <sup>1</sup>А.С.Тулеп

<sup>1</sup>Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан

<sup>2</sup>Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

<sup>3</sup>Satbayev University, Алматы, Казахстан

\*e-mail: gulnara409@mail.ru

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕБРИСТОЙ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

**Аннотация.** В данной статье на основе вариационного уравнения Лагранжа получены интегро-дифференциальные уравнения собственных колебаний вязкоупругой ребристой усеченной конической оболочки. На основе метода конечных элементов разработана методика решения и алгоритм уравнений собственных колебаний вязкоупругой ребристой усеченной конической оболочки с шарнирно и свободно опертыми краями. Задача сводится к решению однородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами большого порядка. Для существования решения основной определитель системы алгебраических уравнений должен быть равен нулю. Из этого условия получаем частотное уравнение с комплексно выходящими параметрами. Комплексные корни частотного уравнения определяются методом Мюллера, на каждой итерации метода Мюллера применяется метод Гаусса с выделением главного элемента. Проведено исследование собственных колебаний вязкоупругих панелей усеченных конических оболочек и выявлены некоторые характерные особенности. С увеличением числа ребер соответственно реальные и мнимые части собственных частот увеличиваются.

**Ключевые слова:** коническая оболочка, панель, нелинейная модель, колебания, вязкоупругость.

**Введение.** Круговые конические оболочки, как элементы конструкций, нашли широкое применение в различных областях машиностроения. Большой практический интерес представляет изучение и устранение резонансных явлений в оболочках. Исследованию собственных колебаний круговых конусов посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ. Однако, до сих пор отсутствуют надежные решения, позволяющие определять параметры резонансов в широком диапазоне изменения физико-геометрических параметров. Имеются также работы, в которых теоретико-экспериментальным методом получены зависимости для определения резонансных частот [1] и форм колебаний усеченных конических панелей [2, 3]. Другой метод в основном используется для исследования оболочек, которые позволяют перейти от уравнений устойчивости конических оболочек к соответствующим уравнениям для цилиндрических оболочек с круговым поперечным сечением. Во многих работах используется безмоментная и полу-безмоментная теории оболочек [4, 5]. Также применяются приближенные методы для решения задач собственных колебаний [6, 7]. Особую трудность вызывают задачи колебаний подкрепленных конических оболочек в геометрически нелинейной постановке с учетом реологических свойств материала, решения для которых практически отсутствуют.

Данная статья посвящена частичному решению этих проблем. Целью настоящей работы является получение формулы для нахождения частот и форм колебаний для круговых ребристых вязкоупругих конических оболочек при различных краевых условиях.

**Методы.** *Постановка задачи и основные соотношения*

В работе рассматриваются собственные колебания замкнутой круговой вязкоупругой конической оболочки с углом конусности  $\theta$ , толщиной  $h$  (рис. 1) с ребрами  $l$  и  $n$  (соответственно по продольным и кольцевым направлениям). Для получения уравнений собственных колебаний используем принцип возможных перемещений Лагранжа, который учитывает граничные условия

$$\delta(K + \Pi - A) = 0 \quad ,$$

где  $K$  - кинетическая энергия оболочки и ребра,  $\Pi$  - потенциальная энергия оболочки и ребра,  $A$  - работа внешних сил.

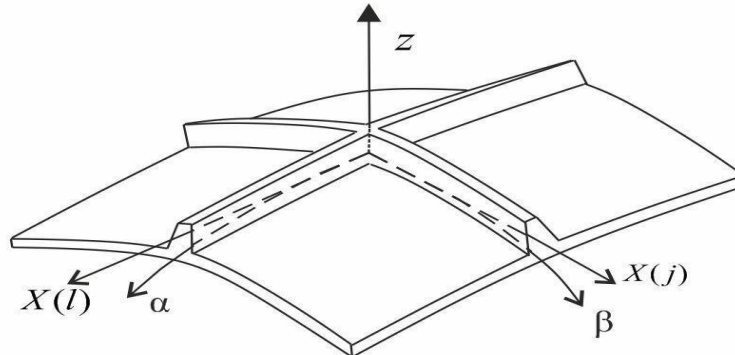


Рисунок 1. Элемент оболочки с подкрепленными ребрами

Срединная поверхность конической оболочки принимается за координатную поверхность  $\alpha, \beta$  и рассматривается также декартова система координат. Оси декартовы  $X, Y$  ортогональной системы координат, направленные по линиям главных кривизн, показаны на рисунке 1, а ось  $Z$  направлена ортогонально срединной поверхности, в сторону вогнутости.

Параметры Ляме, для конической оболочки, приведены в работе [8] и имеют следующий вид  $A = 1, B = x \sin \theta$ , а кривизны -  $k_x = 0, k_y = \frac{\text{ctg} \theta}{x}$ . Деформации в координатной поверхности оболочки выражаются через перемещения  $U, V, W$  вдоль осей  $X, Y, Z$  соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{x \sin \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{U}{x} - \frac{\text{ctg} \theta}{x} W + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{x \sin \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V \right)^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{V}{x} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \left( \frac{1}{x \sin \theta} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\text{ctg} \theta}{x} V \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Физические соотношения для изотропного вязкоупругого тела принимают вид [9, 10]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\tilde{E}}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{\tilde{E}}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z); \\ \tau_{xy} &= \frac{\tilde{E}}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z; \quad \tau_{xz} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  - коэффициент Пуассона материала оболочки, который считается постоянным;  $\tilde{E}_k$  - операторные модули упругости конической оболочки и ребра:

$$\tilde{E}_k f(t) = E_{0k} \left[ f(t) - \int_0^t R_{E_k}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (2)$$

$E_{0k}$  - мгновенный модуль упругости Юнга ( $k=1,2,3...L$ );  $k=1$  - мгновенный модуль упругости оболочки,  $k=2,3...L$  - мгновение модули упругости ребер,  $f(t)$  - непрерывная функция;  $R_{E_k}(t-\tau)$  - ядро релаксации.

Предполагается, что интегральные члены в (2) малые. Тогда существует функция  $f(t) = \varphi(t)e^{-i\omega_R t}$  и интегральные члены заменяются следующими выражениями:

$$\bar{E}_k \varphi = E_{0k} [1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)] \varphi, \quad (3)$$

где

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$$

соответственно косинус и синус преобразования Фурье,  $\omega_R$  - действительная величина. При вычислениях используется трёхпараметрическое ядро Колтунова-Ржаницына:  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$  [9].

Представлено слабо сингулярное ядро релаксации. Ядро при  $t=0$  имеет особенность. Разработанная методика учитывает все приведенные факторы.

Для определения динамических характеристик ребристых усеченных вязкоупругих оболочек с шарнирным опиранием по кромкам применяется метод конечных элементов с восемью узлами и используются криволинейные элементы [3]. Для этого вычисляются кинетическая и потенциальная энергии с учетом геометрической нелинейности. Все приведённые разбиения конструкции изложены в работах [7,8]. Искомые собственные частоты являются комплексными. Реальные части описывает собственные частоты механической системы. В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами.

Место расположения и высота ребер задается функцией:

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \quad (4)$$

Функционал полной энергии деформации вязкоупругой оболочки имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A) dt \quad (5)$$

Здесь  $K$  - кинетическая энергия системы,  $\Pi$  - потенциальная энергия системы,  $A$  - работа внешних сил.

Рассмотрим подкрепленную коническую оболочку с узкими ребрами. Рассматриваемая задача решается в безразмерных параметрах. Тогда основные соотношения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{bx \sin \theta}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\xi}, \quad \bar{U} = \frac{aU}{h^2}, \\ \bar{V} &= \frac{bx \sin \theta V}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\psi}_x = \frac{a\psi_x}{h}, \quad \bar{\psi}_y = \frac{bx \sin \theta \psi_y}{h}, \\ \bar{a} &= \frac{a}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 P}{Eh^4}, \quad \bar{t} = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E_0}{(1-\mu^2)\rho}} t, \quad \bar{F} = \frac{\bar{F}}{h}, \quad \bar{J} = \frac{\bar{S}}{h^2}, \quad \bar{J} = \frac{\bar{J}}{h^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

и получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{1}{\bar{a}^2} \int_{\bar{a}_1}^1 \int_0^1 \left[ \left( 1 + \bar{F} \right) \left( \dot{\bar{U}}^2 + \lambda^2 \dot{\bar{V}}^2 + \bar{a}^2 \dot{\bar{W}}^2 \right) + 2\bar{S} \left( \dot{\bar{U}} \dot{\bar{\psi}}_x + \lambda^2 \dot{\bar{V}} \dot{\bar{\psi}}_y \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{12} + \bar{J} \right) \left( \dot{\bar{\psi}}_x^2 + \lambda^2 \dot{\bar{\psi}}_y^2 \right) \right] \xi d\xi d\eta, \\ \bar{\Theta} &= \int_{\bar{a}_1}^1 \int_0^1 \left[ \left( 1 + \bar{F} \right) \left( \bar{\varepsilon}^2 + \lambda^4 \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\mu\lambda^2 \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \mu_1 \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \frac{5}{6} \mu_1 \bar{a}^2 \cdot \left( \bar{\psi}_x + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{5}{6} \mu_1 \lambda^2 \bar{a}^2 \cdot \left( \bar{\psi}_y + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \frac{c_3}{\xi} \bar{V} \right)^2 \right] + 2\bar{S} \left( \bar{\chi}_1 \bar{\varepsilon}_x + \lambda^4 \bar{\chi}_2 \bar{\varepsilon}_y + \mu\lambda^2 \bar{\chi}_2 \bar{\varepsilon}_x + \mu\lambda^2 \bar{\chi}_1 \bar{\varepsilon}_y + \right. \\ &2\mu_1 \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy} \bar{\chi}_{12} \left. \right) + \left( \frac{1}{12} + \bar{J} \right) \cdot \left( \bar{\chi}_1^2 + \lambda^4 \bar{\chi}_2^2 + 2\mu\lambda^2 \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 4\mu_1 \lambda^2 \bar{\chi}_{12}^2 \right) - \\ &- 2(1-\mu^2) \bar{P} \bar{W} \left. \right] \xi d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Вариационное уравнение для тонкой вязкоупругой оболочки, подкрепленной ребрами  $l$ -го и  $j$ -го направления, получаются как вариация от суммы потенциальной и кинетической энергий с учетом условия сопряжения [11]:

$$\delta K + \sum_{l=1}^N \delta K_l + \sum_{j=1}^n \delta K_j + \delta \Theta + \sum_{l=1}^m \delta \mathcal{E}_l = 0, \quad N = n + m, \quad (8)$$

где  $\mathcal{E}_l = \Pi_l - A_l$  - разность потенциалов внешних сил и работы, приложенных к ребрам. Данная сумма содержит в качестве слагаемых столько уравнений (8), сколько имеется ребер по соответствующим направлениям. Таким образом, применительно к рассматриваемой ребристой оболочке, принцип Лагранжа можно сформулировать так [12, 13, 14]:

- действительные перемещения срединной поверхности оболочки  $U, V, W$  и ребер  $U_m, V_m, W_m$  ( $m = k, j$ ), соответствующие данным граничным условиям и нагрузке, и переводящие оболочку из естественного положения в состояние упругого равновесия, отличаются от всех возможных перемещений тем, что сообщают рассматриваемой системе минимальное количество потенциальной энергии.

Рассматриваются собственные колебания конической оболочки со свободным опиранием ее торцов.

Таким образом, поставлена математическая постановка задачи и приведены основные соотношения вязкоупругих конических оболочек при собственных колебаниях, которые учитывают геометрическую нелинейность, дискретное введение вязкоупругих ребер, их сдвиговую и крутильную жёсткость, поперечные сдвиги и инерцию вращения.

**Методы решения.** Для расчета динамических характеристик панели конических оболочек, учитывающие геометрические нелинейные члены (1)-(2), для тестовых примеров пренебрегаем и воспользуемся методом конечных элементов (МКЭ) в перемещениях. Рассмотрим 8-узловых изопараметрических криволинейных конечных элементов (КЭ), так называемый «вырожденный» элемент оболочки [15]. Элемент предназначен для расчёта оболочек средней и малой толщины с ребрами. Геометрия КЭ представляет искривленный параллелепипед в трехмерном пространстве с линейчатой поверхностью по толщине. Используются локальная  $\xi, \eta, \zeta$  и глобальная декартова  $x, y, z$  системы координат. Координаты произвольной точки КЭ выражаются через координаты узловых точек  $\bar{r}_i$  и компоненты вектора единичной нормали  $\bar{n}_i$ . Конечно-элементное представление уравнений равновесия системы конечных элементов в состоянии движения, с учетом (3), (4), (5) и (8) имеет вид [15]:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\bar{K}(\omega_R)]\{q\} + \{R\} = 0 \quad (9)$$

где  $[M] = \sum_{i,j=1}^n [m_{ij}]$  - матрица масс системы ( $[m_{ij}] = \alpha_1 [m_{ij}]_a + \beta_1 [m_{ij}]_p$ ,  $[m_{ij}]_a$  - элементы матрица масс панели конической оболочки,  $[m_{ij}]_p$  - элементы матрица масс подкрепляющего стержня,  $\alpha_1, \beta_1$  определяются из сопоставления результатов вычисления с опытными данными),  $[\bar{K}(\omega_R)]$  - матрица жесткости системы ( $[K] = \sum_{i,j=1}^n [k_{ij}]$  - матрица жесткости панели конической оболочки и подкрепляющего стержня),  $\{q\}$  - неизвестные узловые перемещения,  $\{R\}$  - вектор внешних нагрузок. Матрица масс (9) является согласованной: структура матрицы масс  $[M] = \sum_{i,j=1}^n [m_{ij}]$  полностью совпадает со структурой матрицы жёсткости. Обе матрицы ( $[M], [\bar{K}(q^t, \omega_R)]$ ) имеют размер (40x40), что отвечает числу степеней свободы КЭ.

Предполагается, что  $\{R\} = 0$ . Тогда рассматриваются собственные колебания панели конической оболочки. Решение (9) ищется в виде:

$$\{q\} = \{Q_A\} e^{-i\omega t} \quad (10)$$

где  $\{Q_A\}$  - амплитуды неизвестных узловых перемещений, комплексная величина;  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  - комплексная частота, которую требуется определить.

Подставляя (10) в (9), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$(-\omega^2 [M] + [K(\omega_R)])\{q\} = 0 \quad (11)$$

Система однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, когда основной определитель однородной системы алгебраических уравнений равен нулю. Тогда получается трансцендентное алгебраическое уравнение с комплексно выходящим параметром, которое решается численно методом Мюллера [14, 16].

**Результаты и анализ.** В качестве исходных данных следует задать радиусы (большие и маленькие), высоту и толщину оболочки, угол полу раствора усеченного конуса, модуль упругости, коэффициент Пуассона, параметры ядра релаксации материала и геометрические

и механические параметры ребер. В качестве ядра релаксации вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро  $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$  Ржаницына-Колтунова [17, 18], обладающее

слабой сингулярностью. Здесь  $A, \alpha, \beta$  - параметры материалы. Рассматриваются вязкоупругие усеченные конические оболочки, у которых большие основания шарнирно оперты, а вторые основания - свободно оперты на коническую оболочку. Коническая оболочка подкреплена 4 ребрами, высотой  $4h$  и шириной  $2h$  (длины дуг между ребрами одинаковы -  $s_i = \pi a / 2$ ). Все ребра вязкоупругие с одинаковыми реологическими свойствами. Параметры усеченной конической оболочки, изготовленной из оргстекла, имеют следующие значения: угол конусности  $\gamma = 0.20, 0.40, 0.60, 0.80$ ; радиусы основания усеченной коническую оболочки -  $a_1 = 15m, a = 18m$  (протяженность оболочки 10 метров). Физико-механические характеристики:  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}, \rho_0 = 3 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}, \nu_c = 0.25, \nu_0 = 0.35, E_c = 2 \cdot 10^{12} \text{ ГПа}, E_0 = 20 \cdot 10^{12} \text{ Па}$ . Значения реологических параметров примем в виде:  $A = 0,048; \beta = 0,05; \alpha = 0,1$ .

В таблице 1 показаны комплексные значения низших частот диссипативно однородной подкрепленной (с четырьмя стержнями) усеченной конической оболочки при различных толщинах оболочки в пределе гипотезы Кирхгофа-Лява [19, 20]. Определяются значения комплексной собственной частоты и соответствующих форм колебаний, когда оба торца контура оболочки шарнирно оперты ( $N_1 = M_1 = U = V = W = 0$ ). В рассматриваемом случае минимальным собственным частотам (реальным частям комплексных частот) соответствуют осесимметричные колебания.

**Таблица 1.** Изменение частоты в зависимости от толщины оболочки

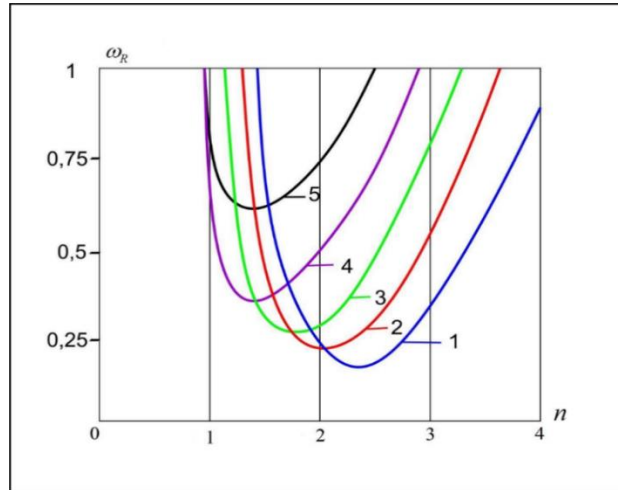
$n$	$h$	$\omega = \omega_R + i\omega_I$	
		$\omega_R$	$-\omega_I \cdot 10^{-2}$
1	0.05	1.94894	1.77381
2		2.18942	2.57321
3		3.44160	2.90566
4		3.92574	3.04574
1	0.02	1.31147	1.42621
2		1.53439	2.49433
3		3.54578	2.98778
4		4.12429	3.21429
1	0.01	1.05218	1.22718
2		1.26867	1.36860
3		3.55691	3.45697
4		4.53974	3.65924

Анализ результатов показывает, что реальные части третьей и четвертой частоты умеренно снижаются, а соответствующие мнимые части плавно возрастают.

Анализ результатов расчета позволяет сделать вывод, что с уменьшением толщины вязкоупругой конической оболочки, у ее реальной и мнимой части первая и вторая частоты колебаний монотонно убываются для диссипативно однородных механических систем.

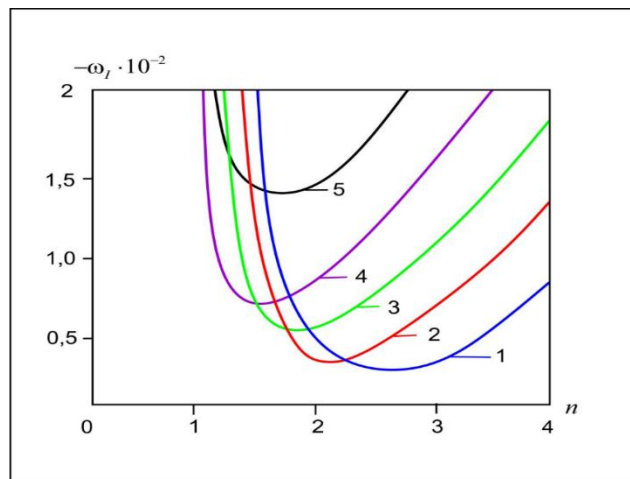
Результаты расчетов однородных вязкоупругих механических систем приведены на рисунках 2 и 3. Как видно из рисунков 2 и 3, подкрепление оболочки четырьмя продольными ребрами позволяет увеличить реальные и мнимые части собственной частоты усеченной конической оболочки. Параметр  $\gamma = 0$  соответствует подкрепленной цилиндрической

оболочке,  $\gamma=0.20, 0.40, 0.60, 0.80$  – соответствуют углу конусности подкрепленной усеченной конической оболочке. Учет реологических свойств материала позволяет увеличить (или уменьшить) частотные значения оболочки до 10%. Для изгибных колебаний наблюдается существенное уменьшение локальных максимумов нормальных перемещений с увеличением площади кольцевых ребер оболочки. Этот эффект становится более заметным с повышением номера частоты  $n$  [21, 22].



**Рисунок 2.** Изменение параметра (реальной части) комплексной частоты усеченных конических оболочек вращения в зависимости от  $n$  при различных  $\gamma$  :

1.  $\gamma=0$ ; 2.  $\gamma=0.20$ ; 3.  $\gamma=0.40$ ; 4.  $\gamma=0.60$ ; 5.  $\gamma=0.80$ .



**Рисунок 3.** Изменение параметра (мнимой части) комплексной частоты усеченной конической оболочки в зависимости от  $n$  при различных  $\gamma$  :

1.  $\gamma=0$ ; 2.  $\gamma=0.20$ ; 3.  $\gamma=0.40$ ; 4.  $\gamma=0.60$ ; 5.  $\gamma=0.80$ .

**Заключения.** 1. Разработан алгоритм решения задач собственных колебаний оболочек для ребристых вязкоупругих конических оболочек. Для решения динамических задач применяются метод конечных элементов, метод замораживания и методы Мюллера и Гаусса.

2. Анализ результатов расчета показывает, что с уменьшением толщины вязкоупругой конической оболочки, реальные и мнимые части первой и второй частот колебаний монотонно

убывают. Реальные части третьей и четвертой частот умеренно снижаются, а соответствующие мнимые части плавно возрастают.

3. Учет реологических свойств материала позволяет увеличить (или уменьшить) частотные значения оболочки до 10% .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
- [2] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
- [3] Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа. 1982. – 400 с.
- [4] Шереметьева А.К., Чехонин К.А. Анализ деформационных свойств полимерных композитов в условиях фазовых и релаксационных переходов толщины // Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019), 24–31 мая 2019 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2019. –С. 365-367.
- [5] Safarov I.I, Almuratov, Sh. TeshaeV M.Kh, Homidov F.F., Rayimov D.G. On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads // Indian Journal of Engineering. 17(47), 2020. –P. 127-133.
- [6] TeshaeV, M.K., Safarov, I.I., Kuldashov, N.U., Ishmamatov, M.R., Ruziev, T.R. On the Distribution of Free Waves on the Surface of a Viscoelastic Cylindrical Cavity // Journal of Vibrational Engineering and Technologies.
- [7] Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells. Arch. Mech. 1998. №50, №3. –P.483-495.
- [8] Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. «Запорожье» Р.Украина, 2009. –400 с.
- [9] Safarov I.I., TeshaeV M.Kh., Boltaev Z.I. Own Vibrations of Bodies Interacting with Unlimited Deformable Environment. Open Access Library Journal. 2018, Volume 5. – P. 1-22. <https://doi.org/10.4236/oalib.1104432>.
- [10] Safarov I.I., TeshaeV M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. American Journal of Mechanics and Applications. –2018. –6(2). – P. 37-49. <http://www.sciencepubliDOI:10.11648>.
- [11] Абовский Н.П. Ребристые оболочки. Красноярск. 1967. –61 с.
- [12] Ершов, Н.П. Состояние и перспективы развития расчетно-экспериментальных работ в области проектирования тонкостенных конструкций из композиционных материалов [Текст] / Н.П. Ершов// Механика композитных материалов, 1988. –№1. –С. 86-92.
- [13] Ефимов, А.Б. Решение осесимметричной задачи теории упругости для несжимаемых материалов с помощью гибридного метода конечных элементов [Текст] /А.Б. Ефимов, О.В. Аксененко, А.В. Цвелих // Математическое моделирование систем и процессов. – 1(1). – 1992. –С. 67-81.
- [14] Laura, P.A. and Gutierrez, R.H. Vibration analysis on a rectangular plate subjected to a thermal gradient // Journal of Sound and Vibration. –1980. –№ 72. –P. 263–264.
- [15] Gupta, A.K. and Khanna, A. Vibration of clamped viscoelastic rectangular plate with parabolic thickness variations // Shock and Vibration. –2008. –№ 15 (6). –P. 713–723.
- [16] Lal, R. Transverse vibrations of orthotropic non-uniform rectangular plate with continuously varying density // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. –2003. –№ 34. –P. 587–606.
- [17] Sobotka, Z. Free vibration of visco-elastic orthotropic rectangular plates // Acta Technica CSAV. –1978. –№ 6. –P. 678–705.
- [18] Singh, B. and Saxena, V. Transverse vibration of rectangular plate with bi-directional thickness variation // Journal of Sound and Vibration. –1996. –№ 198. –P. 51–65.
- [19] Kaplunov J.D., Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). –2000. –№ 51. – P. 29-48.
- [20] Lekomtsev S.V. Konechno-elementnye algoritmy rascheta sobstvennykh kolebaniy trekhmernykh obolochek // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2012. – Т. 5, –№. 2. –P. 233-243.
- [21] Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Ustoichivost' koaksial'nykh tsilindricheskikh obolochek, sodержashchikh vrashchayushchiysya potok zhidkosti // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2013. – Т. 6, –№. 1. – P. 94-102.
- [22] Присекин В.Л. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел / В.Л. Присекин, Г.И. Расторгуев. – Новосибирск: НГТУ, 2010. –238 с.



REFERENCES

- [1] Novozhilov V.V. Teoriya tonkih obolochek. – L.: Sudpromizdat, 1962. - 431 s.
- [2] Vol'mir A.S. Nelinejnaja dinamika plastinok i obolochek. – M.: Nauka, 1972. -432 s.
- [3] Rzhanicyn A.R. Stroitel'naja mehanika. -M.: Vysshaja shkola. 1982. - 400 s.
- [4] Sheremet'eva A.K., Chehonin K.A. Analiz deformacionnyh svojstv polimernyh kompozitov v uslovijah fazovyh i relaksacionnyh perehodov tolshhiny // Materialy XXI Mezhdunarodnoj konferencii po vychislitel'noj mehanike i sovremennym prikladnym programmym sistemam (VMSPPS'2019), 24–31 maja 2019 g., Alushta. – M.: Izd-vo MAI, 2019. -S. 365-367.
- [5] Safarov I.I, Almuratov, Sh. TeshaeV.M.Kh, Homidov F.F., Rayimov D.G. On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads // Indian Journal of Engineering. 17(47), 2020. -P. 127-133.
- [6] TeshaeV, M.K., Safarov, I.I., Kuldashov, N.U., Ishmamatov, M.R., Ruziev, T.R. On the Distribution of Free Waves on the Surface of a Viscoelastic Cylindrical Cavity // Journal of Vibrational Engineering and Technologies.
- [7] Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells. Arch. Mech. 1998. №50, №3. –P.483-495.
- [8] Klovanich S.F. Metod konechnyh jelementov v nelinejnyh zadachah inzhenernoj mehaniki. «Zaporozh'e» R.Ukraina, 2009. -400 s.
- [9] Safarov I.I., TeshaeV M.Kh., Boltaev Z.I. Own Vibrations of Bodies Interacting with Unlimited Deformable Environment. Open Access Library Journal. 2018, Volume 5. – P. 1-22. <https://doi.org/10.4236/oalib.1104432>.
- [10] Safarov I.I., TeshaeV M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. American Journal of Mechanics and Applications. -2018. -6(2). - P. 37-49. <http://www.sciencepublidoi:10.11648>.
- [11] Abovskij N.P. Rebristye obolochki. Krasnojarsk. 1967. -61 s.
- [12] Ershov, N.P. Sostojanie i perspektivy razvitija raschetno-jeksperimental'nyh rabot v oblasti proektirovanija tonkostennyh konstrukcij iz kompozicionnyh materialov [Tekst] / N.P. Ershov // Mehanika kompozitnyh materialov, 1988. –№1. –S. 86-92.
- [13] Efimov, A.B. Reshenie osesimmetrichnoj zadachi teorii uprugosti dlja neszchimaemyh materialov s pomoshh'ju gibridnogo metoda konechnyh jelementov [Tekst] /A.B. Efimov, O.V. Aksenenko, A.V. Cvelih // Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov. – 1(1). – 1992. -S. 67-81.
- [14] Laura, P.A. and Gutierrez, R.H. Vibration analysis on a rectangular plate subjected to a thermal gradient // Journal of Sound and Vibration. -1980. -№ 72. –P. 263–264.
- [15] Gupta, A.K. and Khanna, A. Vibration of clamped viscoelastic rectangular plate with parabolic thickness variations // Shock and Vibration. -2008. -№ 15 (6). –P. 713–723.
- [16] Lal, R. Transverse vibrations of orthotropic non-uniform rectangular plate with continuously varying density // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. -2003. -№ 34. –P. 587–606.
- [17] Sobotka, Z. Free vibration of visco-elastic orthotropic rectangular plates // Acta Technica CSAV. - 1978. -№ 6. –P. 678–705.
- [18] Singh, B. and Saxena, V. Transverse vibration of rectangular plate with bi-directional thickness variation // Journal of Sound and Vibration. -1996. -№ 198. –P. 51–65.
- [19] Kaplunov J.D., Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). -2000. -№ 51. - P. 29-48.
- [20] Lekomtsev S.V. Konechno-elementnye algoritmy rascheta sobstvennykh kolebanii trekhmernykh obolochek // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2012. – T. 5, –№. 2. –P. 233-243.
- [21] Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Ustoichivost' koaksial'nykh tsilindricheskikh obolochek, sodержashchikh vrashchayushchiysya potok zhidkosti // Vychisl. mekh. splosh. sred. – 2013. – T. 6, -№. 1. – P. 94-102.
- [22] Prisekin V.L. Osnovy metoda konechnyh jelementov v mehanike deformiruemyh tel / V.L. Prisekin, G.I. Rastorguev. – Novosibirsk: NGTU, 2010. -238 s.

<sup>1</sup>А.Марасулов, <sup>2</sup>И.И.Сафаров, <sup>3</sup>Г.А.Абдраимова\*, <sup>1</sup>Ә.С.Төлеп

<sup>1</sup>Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан

<sup>2</sup>Ташкент химиялық-технологиялық институты, Ташкент, Өзбекістан

<sup>3</sup>Satbayev University, Алматы, Қазақстан

\*e-mail: gulnara409@mail.ru

## ТҰТҚЫР-СЕРПІМДІ ҚЫРЛЫ ҚИЫҚ КОНУСТЫҚ ҚАБЫҚШАНЫҢ МЕНШІКТІ ТЕРБЕЛІСТЕРІ

**Аңдатпа.** Бұл мақалада Лагранж вариациялық теңдеуіне сүйене отырып, тұтқыр-серпімді қырлы қиық конустық қабықшаның меншікті тербелістерінің интегралдық-дифференциалдық теңдеулері алынды. Ақырлы элементтер әдісінің көмегімен буынды және еркін тірелген шеттері бар тұтқыр-серпімді қырлы қиық конустық қабықшаның меншікті тербелістерінің теңдеулерін шешу әдісі мен алгоритмі жасалды. Бұл мәселе реті жоғары комплекс коэффициентті біртекті алгебралық теңдеулерді шешуге келтірілді. Шешімнің бар болуы үшін алгебралық теңдеулер жүйесінің негізгі детерминанты нөлге тең болуы керек. Осы шарттан комплекс шығыс параметрлері бар жиілік теңдеуін аламыз. Жиілік теңдеуінің комплекс түбірлері Мюллер әдісімен анықталды, Мюллер әдісінің әрбір итерациясында бас элементті бөлуге әкелетін Гаусс әдісі қолданылды. Қиық конустық қабықшалардың тұтқыр-серпімді панельдерінің меншікті тербелістерін зерттеу жүргізілді және кейбір сипаттамалық ерекшеліктері анықталды. Қырлар санының артуына сәйкес меншікті жиіліктердің нақты және жорамал бөліктері де артады.

**Негізгі сөздер:** конустық қабықша, панель, сызықты емес модель, тербелістер, тұтқыр-серпімділік.

<sup>1</sup>A. Marasulov, <sup>2</sup>I.I. Safarov, <sup>3</sup>G.A. Abdraimova\*, <sup>1</sup>A.S. Tolep

<sup>1</sup>K.A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan

<sup>2</sup>Tashkent Chemical-Technological Institute, Tashkent, Uzbekistan

<sup>3</sup>Satbayev University, Almaty, Kazakhstan

\*e-mail: gulnara409@mail.ru

## OWN VIBRATIONS OF RIBBED TRUNCATED CONICAL SHELL

**Abstract.** In this article the integro-differential equations of own vibrations of a viscoelastic ribbed truncated conical shell are obtained on the basis of the Lagrange variational equation. Using the finite element method, a method for solving and an algorithm for the equations of own vibrations of a viscoelastic ribbed truncated conical shell with hinged and freely supported edges has been developed. The problem is reduced to solving homogeneous algebraic equations with large-order complex coefficients. For a solution to exist, the basic determinant of a system of algebraic equations must be equal to zero. From this condition, we obtain the frequency equation with complex output parameters. Complex roots of the frequency equation are determined by the Muller's method, at each iteration of the Muller's method, the Gauss method with the selection of the main element is applied. The study of own vibrations of viscoelastic panels of truncated conical shells is carried out and some characteristic features are revealed. With an increase in the number of edges, respectively, the real and imaginary parts of the own frequencies increase.

**Key words:** conical shell, panel, nonlinear model, vibrations, viscoelasticity.