УДК 517.956+4.536.24 https://doi.org/10.51301/vest.su.2021.i2.15

Е.М. Хайруллин*, Г.А. Тулешева, А.Т. Шакуликова
Satbayev University, Алматы, Казахстан
*e-mail: khairullin_42_42@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Аннотация. Рассматривается краевая задача для уравнений тепло- и массообмена, когда одно из граничных условий содержит нормальные производные третьего порядка, к которой сводится некоторая граничная задача тепло- и массообмена в процессах сушки. Решение краевой задачи ищется в виде теплового потенциала двойного слоя. Приведена лемма о нахождении пределов нормальной производной третьего порядка. Используя граничные условия, получена система интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) с различными операторами теплопроводности. Характеристическая часть СИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа при выполнении условия разрешимости. Методом регуляризации СИДУ сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра-Фредгольма. Приведена теорема о разрешимости краевой задачи при выполнении условия разрешимости уравнений тепло- и массообмена с нормальными производными в граничных условиях.

Ключевые слова: тепло- и массообмен, краевая задача, нормальные производные третьего порядка, условия разрешимости, регуляризация.

1. Постановка задачи. Найти регулярное решение системы

$$\frac{\partial U_k(x,t)}{\partial t} = \lambda_k \Delta U_k(x,t), \quad k=\overline{1,3} \tag{1}$$

в области $Q_T \equiv \{(x',x_n,t): x' \in R^{n-1}, x_n \in R_+, t \in]0,T[\}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$U_k(x,0)=0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\left(U_1(x,t)+a_1U_3(x,t)\right)\Big|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t), \quad (x',t) \in Q_T^{(1)} \equiv Q_T \backslash x_n, \tag{3}$$

$$\left(U_2(x,t)+a_2U_3(x,t)\right)\Big|_{x_n=0} = \varphi_2(x',t), \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{k_n=0}^{3} a_{k_n}^{(k)} \frac{\partial^{k_n} U_k(x,t)}{\partial x_n^{k_n}}\Bigg|_{x_n=0} = \varphi_3(x',t), \tag{5}$$

где Δ −оператор Лапласа по переменной $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$;
λ_k $(k=\overline{1,3})$ −заданные постоянные, причем $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$; $a_1, a_2, a_{k_n}^{(k)}$ − заданные постоянные, причем $a_3^{(k)} \neq 0$; $\varphi_k(x',t) \in C_{x',t}^{4,2}\left(Q_T^{(1)}\right)$.

2. Интегральное представление решения краевой задачи (1) – (5).

Решение краевой задачи (1) – (5) будем искать в следующем виде:

$$U_k(x,t) = -\psi_k * G_{x_n}^{(k)}[x,t], \quad k=\overline{1,3}, \tag{6}$$

где $$G^{(k)}(x,t) = \frac{2\lambda_k exp\left[-\frac{|x|^2}{4\lambda_k t}\right]}{\left[2\sqrt{\pi\lambda_k t}\right]^n}, \qquad G_{x_n}^{(k)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_n} G^{(k)}(x,t),$$

$$\psi_k * G_{x_n}^{(k)}[x,t] = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_k(\xi',\tau) G_{x_n}^{(k)}(x'-\xi',x_n,t-\tau)d\xi',$$

$R^{n-1}-(n-1)$ - мерное евклидовое пространство точек $x'=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ с нормой $|x'|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2}$,

$\psi_k(x',t)$ - неизвестные ограниченные непрерывные функции с частными производными достаточно высокого порядка по переменным x' и t.

3. Сведение задачи (1) – (5) к СИДУ.

Функция $U_k(x,t)$, определенная равенством (6), удовлетворяет системе (1) и начальным условиям (2). Неизвестные функции $\psi_k(x',t)$ нужно определить так, чтобы функции $U_k(x,t)$, определяемые формулами (6), удовлетворяли граничным условиям (3)-(5). Для этого приведем следующую лемму.

Лемма. Если $\omega(x',t)\in C^{4,2}_{x',t}\left(Q_T^{(1)}\right)$,

то $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\partial U_k(x,t)}{\partial x_n}=-\frac{1}{\lambda_k}F_k[\omega]*G^{(k)}[x',0,t]$, $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\partial^2 U_k(x,t)}{\partial x_n^2}=\frac{1}{\lambda_k}F_k[\omega]$,

$\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\partial^3 U_k(x,t)}{\partial x_n^3}=-\frac{1}{\lambda_k^2}F_k^2[\omega]*G^{(k)}[x',0,t]$,

где $F_k\equiv\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_k\Delta_{x'}$, $\Delta_{x'}$ –оператор Лапласа по переменной x'.

Лемма доказывается интегрированием по частям после замены $G^{(k)}_{x_nx_n}$ через $\frac{1}{\lambda_k}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_k\Delta_{x'}\right)G^{(k)}$ и используя свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя.

Для определения функции $\psi_k(x',t)$, подставим (6) в граничные условия (3) - (5). При этом, используя лемму, получим СИДУ

$$\psi_1(x',t)+a_1\psi_3(x',t)=\varphi_1(x',t), \tag{7}$$

$$\psi_2(x',t)+a_2\psi_3(x',t)=\varphi_2(x',t), \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\left[a_0^{(k)}\psi_k(x',t)+a_1^{(k)}\left(\left(-\frac{1}{\lambda_k}\right)F_k[\psi_k]*G^{(k)}[x',0,t]\right)+\right.$$
$$\left.+a_2^{(k)}\left(\frac{1}{\lambda_k}F_k[\psi_k]\right)+a_3^{(k)}\left(-\frac{1}{\lambda_k^2}F_k^2[\psi_k]*G^{(k)}[x',0,t]\right)\right]=\varphi_3(x',t). \tag{9}$$

Исключая функции $\psi_2(x',t)$ и $\psi_3(x',t)$ из системы (7) - (9), получим

$$\sum_{k=1}^{2}\left[a_0^{(k)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1}\psi_1+\frac{a_1^{(k)}}{(-\lambda_k)}F_k[\psi_1]*G^{(k)}[x',0,t]+\frac{a_2^{(k)}}{\lambda_k}F_k\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1}\psi_1\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{a_3^{(k)}}{\lambda_k^2}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1}F_k^2[\psi_1]*G^{(k)}[x',0,t]\right]+$$
$$+\left(-\frac{1}{a_1}\right)\left[a_0^{(3)}\psi_1(x',t)-\frac{a_1^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\psi_1]*G^{(3)}[x',0,t]+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\psi_1]-\frac{a_3^{(3)}}{\lambda_3^2}F_3^2[\psi_1]*G^{(3)}[x',0,t]\right]=\Phi_1(x',t), \tag{10}$$

где

$$\Phi_1(x',t)=\varphi_3(x',t)-\left\{a_0^{(2)}\Phi(x',t)+\frac{a_1^{(2)}}{-\lambda_2}F_2[\Phi(x',t)]*G^{(2)}[x',0,t]+\right.$$

$$+\frac{a_2^{(2)}}{\lambda_2}F_2[\Phi]-\frac{a_3^{(2)}}{\lambda_2^2}F_2^2[\Phi]*G^{(2)}[x',0,t]\Big\}+a_0^{(3)}\Phi(x',t)--\frac{a_1^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\Phi(x',t)]*$$
$$G^{(3)}[x',0,t]+\frac{a_2^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\Phi]-\frac{a_2^{(3)}}{\lambda_3^2}F_3[\Phi]*G^{(3)}[x',0,t], \tag{11}$$

причем $\Phi(x',t)=\varphi_2(x',t)-\frac{a_2}{a_1}\varphi_1(x',t)$.

4. Решение характеристической части системы (7) - (9).

Выделяя главную часть ИДУ (10), рассмотрим его характеристическую часть:

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k^2}F_k^2[\psi_1]*G^{(k)}[x',0,t]=\Phi_2(x',t), \tag{12}$$

где

$$\Phi_2(x',t)=\Phi_1(x',t)-\sum_{k=1}^{2}\left[a_0^{(k)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\psi_1-\frac{a_1^{(k)}}{\lambda_k}F_k[\psi_1]*G^{(k)}[x',0,t]+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2^{(k)}}{\lambda_k}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1}F_k[\psi_1]\right]+\frac{1}{a_1}\left[a_0^{(3)}\psi_1(x',t)-\frac{a_1^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\psi_1]*G^{(3)}[x',0,t]+\right.$$
$$\left.+\frac{a_2^{(3)}}{\lambda_3}F_3[\psi_1]\right], \tag{13}$$

где $\Phi_1(x',t)$ определяется равенством (11); A_k - заданные постоянные, зависящие от $a_1,a_2,a_3^{(k)},\lambda_k\ (k=\overline{1,3})$.

Временно считая правую часть уравнения (12) известной функцией и предполагая, что функции $\psi_1(x',t),\ \Phi_2(x',t)\in C_{x',t}^{4,2}\left(Q_T^{(1)}\right)$, применим интегральные преобразования Фурье по переменной x' к обеим частям уравнения (12). Тогда

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_{R^{n-1}}\left[\int_0^t d\tau\int_{R^{n-1}}F_k^2[\psi_1]G^{(k)}(x'-\xi',t-\tau)\times\right.$$
$$\times\exp[i(x',s')]dx']d\xi'=\widetilde{\Phi_2}(s',t),$$

где $\widetilde{\Phi_2}(s',t)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_{R^{n-1}}\Phi_2(x',t)\exp[i(x',s')]dx'$.

Производя замену $x'-\xi'=y'$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k^2}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{n-1}}\int_0^t d\tau\left(\int_{R^{n-1}}F_k^2[\psi_1]\exp[i(\xi',s')]d\xi'\right)\times$$
$$\times\int_{R^{n-1}}G^{(k)}(y',t-\tau)\exp[i(y',s')]dy'=\widetilde{\Phi_2}(s',t).$$

Используя значение интеграла

$$\int_{R^{n-1}}G^{(k)}(y',t-\tau)\exp[i(y',s')]dy'=\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp[-\lambda_k|s'|^2(t-\tau)],$$

перепишем последнее равенство

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t\tilde{F}_k^2[\tilde{\psi}_1]\frac{\exp[-\lambda_k|s'|^2(t-\tau)]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau=\widetilde{\Phi_2}(s',t).$$

Применяя к этому уравнению преобразование Лапласа по переменной t, получим

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int_0^\infty\left(\int_0^t\tilde{F}_k^2[\tilde{\psi}_1]\frac{\exp[-\lambda_k|s'|^2(t-\tau)]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau\right)\exp[-pt]dt=\overline{\widetilde{\Phi_2}}(s',p),$$

где $\overline{\overline{\Phi_2}}(s',p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\int_0^\infty exp[-pt]\left(\int_{R^{n-1}}\tilde{\Phi}(s',t)\,exp[i(x',s')]dx'\right)dt.$

Переставляя интегралы по формуле Дирихле, имеем

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty \tilde{F}_k^2[\tilde{\psi}_1(s',\tau)]\frac{exp[-(pt+\lambda_k|s'|^2(t-\tau))]}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau\right)dt = \overline{\overline{\Phi_2}}(s',p).$$

Производя замену интегрирования $t-\tau = t_1$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int_0^\infty\frac{exp[-(p+\lambda_k|s'|^2)t_1]}{\sqrt{\pi t_1}}dt_1\,\tilde{F}_k^2[\tilde{\psi}_1(s',p)] = \overline{\overline{\Phi_2}}(s',p).$$

В силу равенства

$$\int_0^\infty\frac{exp[-(p+\lambda_k|s'|^2)t_1]}{\sqrt{\pi t_1}}dt_1 = \frac{1}{\sqrt{p+\lambda_k|s'|^2}},$$

получим

$$\bar{\tilde{\psi}}_1(s',p) = (p+\lambda_1|s'|^2)\bar{\tilde{L}}(s',p)\overline{\overline{\Phi_2}}(s',p), \tag{14}$$

где
$$\bar{\tilde{L}}(s',p) = \frac{\overline{\overline{L_0}}(s',p)}{\sqrt{p+\lambda_1|s'|^2}}, \tag{15}$$

причем
$$\overline{\overline{L_0}}(s',p) = \frac{1}{\sqrt{p+\lambda_1|s'|^2}\bar{\tilde{\Delta}}(s',p)}, \tag{16}$$

в свою очередь
$$\bar{\tilde{\Delta}}(s',p) = \sum_{k=1}^{3}A_k\sqrt{\frac{p}{\lambda_k}+|s'|^2}. \tag{17}$$

Если $\bar{\tilde{\Delta}}(s',p)\neq 0$, то задача корректно поставлена и с помощью композиции операторов

$$U_k(x,t) = \Phi_{2,\lambda_k}\left[F_{\lambda_k}^{-1}[\varphi_k(x',t);x_n]\right]$$

задача сводится к системе интегральных уравнений типа Вольтерра-Фредгольма второго рода относительно неизвестных плотностей с интегрируемой особенностью.

Если $\bar{\tilde{\Delta}}(s',p) = 0$, то известное условие Лопатинского не выполнено, т.е. надо исследовать корни иррационального уравнения $\bar{\tilde{\Delta}}(s',p) = 0$.

Вводя обозначение $\sqrt{\frac{p}{\lambda_k}+|s'|^2} = z_k$ и учитывая (17), перепишем так:

$$\bar{\tilde{\Delta}}(s',p) = \sum_{k=1}^{3}B_k(z_k)z_k = 0, \tag{18}$$

где $B_k(z_k) = A_k z_k^2$.

Займемся рационализацией иррационального уравнения (18), умножая обе части на выражение $B_1z_1 + B_2z_2 - B_3z_3$, получим уравнение

$$(B_1z_1+B_2z_2)^2 - B_3^2z_3^2 = 0 \text{ или } (B_1^2z_1^2+B_2^2z_2^2-B_3^2z_3^2)+2B_1B_2z_1z_2 = 0.$$

Далее умножая последнее уравнение на $(B_1^2z_1^2+B_2^2z_2^2-B_3^2z_3^2)-2B_1B_2z_1z_2$ и учитывая введенное ранее обозначение, найдем уравнение шестой степени

$$P_6(p) = B_0p^6 + B_1p^5|s'|^2 + B_2p^4|s'|^4 + B_3p^3|s'|^6 +$$
$$+B_4p^2|s'|^8 + B_5p|s'|^{10} + B_6|s'|^{12} = 0,$$

где $B_i\ (i=\overline{0,6})$ выражается через заданные постоянные $a_i\ (i=1,2)$, $A_i\ (i=1,2)$ и $\lambda_i(i=\overline{1,3})$. Выделим среди всех корней многочлена $P_6(p)$ только те, которые удовлетворяют уравнению (18) и обозначим их через q_k и их кратность через μ_k, $k=\overline{1,6}$, причем $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_6 = 6$, $Req_k > 0$. Тогда равенство (16) можно переписать так:

$$\overline{\overline{L_0}}(s',p) = \frac{1}{\sqrt{p+\lambda_1|s'|^2}}\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{\mu_k}\frac{A_{ik}}{(p+q_k|s'|^2)}. \tag{19}$$

Отсюда используя известные соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{p+\lambda_1|s'|^2}} \div\rightarrow \frac{exp[-\lambda_1|s'|^2 t]}{\sqrt{\pi t}},$$

$$\frac{1}{(p+q_k|s'|^2)^i} \div\rightarrow \frac{t^{i-1}}{\Gamma(i)} exp[-q_k|s'|^2 t]$$

и применяя формулу свертки двух изображений к равенству (19), найдем

$$\widetilde{L_0}(s',t) = \int_0^t \frac{exp[-\lambda_1|s'|^2\tau]}{\sqrt{\pi\tau}} \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{A_{ik}(t-\tau)^{i-1}}{\Gamma(i)} exp[-q_k|s'|^2(t-\tau)]d\tau.$$

Отсюда применяя замену $\tau = tz,$ имеем

$$\widetilde{L_0}(s',t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{A_{ik}\, t^{i-1}(1-z)^{i-1}}{\Gamma(i)\sqrt{z}} exp[-a(q_k,z)|s'|^2 t]dz, \tag{20}$$

где $a(q_k,z) = \lambda_1 z + q_k(1-z).$

Используя (20) и применяя формулу свертки к выражению (15) и производя замену $\tau = tz,$ будем иметь

$$\tilde{L}(s',t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{\mu_k} \int_0^1 \frac{A_{ik}}{\Gamma(i)} \frac{t^i(1-z)^{i-1}(1-z_1)^{i-1}}{\sqrt{zz_1}} exp[-a(q_k,z,z_1)|s'|^2 t]dz \right) dz_1, \tag{21}$$

где $a(q_k,z,z_1) = \lambda_1 z_1 + a(q_k,z)(1-z_1).$

Далее учитывая (21) и применяя формулу свертки в правой части формулы (14), найдем функцию $\tilde{\psi}_1(s',t)$:

$$\tilde{\psi}_1(s',t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1|s'|^2\right) \int_0^t \widetilde{\Phi_k}(s',\tau)\tilde{L}(s',t-\tau)d\tau, \tag{22}$$

где $\tilde{L}(s',t)$ определяется выражением (21).

Отсюда применяя обратное преобразование Фурье по переменной s', при этом считая, что $Req_k > 0$, имеем

$$\psi_1(x',t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Phi_2(\xi',\tau)\mathrm{H}(x'-\xi',t-\tau)]d\xi', \tag{23}$$

где

$$\mathrm{H}(x',t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{\mu_k}\frac{A_{ik}}{\Gamma(i)}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{(t-\tau)^i(1-z_1)^{i-1}(1-z)^{i-1}}{\sqrt{zz_1}}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1\Delta_{x'}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{exp\left[-\frac{|x'-\xi'|^2}{4a(q_k,z,z_1)(t-\tau)}\right]}{\left[2\sqrt{\pi a(q_k,z,z_1)t}\right]^{n-1}}dz\right)dz_1. \tag{24}$$

Подставляя в (23) вместо функции $\Phi_2(x',t)$ ее выражение из (13) и при этом учитывая (11), получим относительно неизвестной функции $\psi_1(x',t)$ интегральное уравнение

$$\psi_1(x',t) = \Phi_3(x',t) - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \psi_1(\xi',\tau)K(x'-\xi',t-\tau)]d\xi', \tag{25}$$

где свободный член $\Phi_3(x',t)$ определяется равенством:

$$\Phi_3(x',t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Phi_1(\xi',\tau)\mathrm{H}(x'-\xi',t-\tau)]d\xi',$$

ядро $K(x',t)$ имеет вид

$$K(x',t) = \sum_{k=1}^{2}\left[a_0^{(k)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\mathrm{H}(x',t) - \frac{a_1^{(k)}}{\lambda_k}F_k \times\right.$$

$$\left[\left[\int_{\tau_1}^{t} d\tau \int_{R^{n-1}} G^{(k)}(\xi'-\sigma',\tau-\tau_1)H(x'-\xi',t-\tau)d\xi'\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a_2^{(k)}}{\lambda_k}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{k-1} F_k[\mathrm{H}(x',t)]\right] - \frac{a_0^{(3)}}{a_1}\mathrm{H}(x',t) + \frac{a_1^{(3)}}{a_1\lambda_3} F_3 \times$$

$$\times\left[\int_{\tau}^{t} d\tau \int_{R^{n-1}} G^{(3)}(\xi'-\sigma',\tau-\tau_1)\times H(x'-\xi',t-\tau)d\xi'\right] - \frac{a_2^{(3)}}{a_1\lambda_3} F_3[H(x',t)],$$

причем $\Phi_1(x',t)$ и ядро $\mathrm{H}(x',t)$ соответственно определяются из (11) и (23). Теперь для оценки ядра $K(x',t)$ найдем частные производные $F_k=\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_k\Delta_{x'}$ от функции вида $t\cdot exp\left[-\lambda\frac{|x'|^2}{t}\right]$ и используя неравенство $|x'-\xi'|^r exp\left[-\varepsilon\delta\frac{|x'-\xi'|^2}{t}\right]\le Mt^{\frac{r}{2}},\ (\varepsilon>0),$ где $M,\delta -$ положительные числа, $r -$ любое положительное число, для ядра $K(x',t)$ можно получить оценку

$$|K(x',t)|\le M_1\frac{exp\left[-(1-\varepsilon)\delta\frac{|x'|^2}{t}\right]}{(\sqrt{t})^n},\qquad (0<\varepsilon<1) \tag{26}$$

где

$M_1 -$ положительное число.

На основании оценки (26), интегральное уравнение (25) можно решить методом последовательных приближений.

Итак, подытоживая полученные результаты, приводим теорему о разрешимости краевой задачи.

Теорема. Если $\varphi_k(x',t)\in C^{4,2}_{x',t}\left(Q_T^{(1)}\right)$ и $Req_k>0$ (q_k $-$ корни характеристического уравнения (18), то существует функция

$U_k(x,t)\in C^3_{x_n}(Q_T)$, являющаяся решением краевой задачи (1)–(5), выраженная формулой (6), где неизвестная функция $\psi_1(x',t)$ определяется из интегрального уравнения (25), остальные функции $\psi_2(x',t)$ и $\psi_3(x',t)$ из системы (7) и (8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иванова Л.П., Ким Е.И. Двумерная задача тепло- и массообмена в процессах сушки. Известия АН СССР. Энергетика и автоматика, 1959.-N3, с.76-84.

[2] Ким Е.И., Иванова Л.П. Об условиях разрешимости одной краевой задачи уравнения теплопроводности. Доклады АН СССР, 1961.-N4, с.795-798.

[3] Лыков А.В. О системах дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса в капиллярно-пористых телах. Инж.физ.журнал,1974.-т.27(№1), с.18-25.

[4] Гамаюнов Н.И. Решение m-уравнений переноса. –В сб.: Математические и физические вопросы тепло- и массообмена. Минск, 1973, с. 73-86.

[5] Хайруллин Е.М., Әмір Е.М. Двухмерная особая граничная задача тепло- и массообмена. Труды Сатпаевских чтений «Инновационные решения традиционных проблем:инженерия и технологии», Алматы, 2018.-С.1089-1092.

[6] Хайруллин Е.М., Тулешова Г.А., Шакуликова А.Т. Об одной граничной задаче тепло- и массообмена. Вестник КазНИТУ, 2019. - N4, с.510-516.

REFERENCES

[1] Ivanova L.P., Kim E.I. Dvumernaya zadacha teplo- i massoobmena v protsessakh sushki. Izvestiya AN SSSR. Energetika i avtomatika, 1959.-N3, c.76-84.

[2] Kim E.I., Ivanova L.P. Ob usloviyakh razreshimosti odnoi kraevoi zadachi uravneniya teploprovodnosti. Doklady AN SSSR, 1961.-N4, c.795-798.

[3] Lykov A.V. O sistemakh differentsial'nykh uravnenii teplo- i massoperenosa v kapillyarno-poristykh telakh. Inzh.fiz.zhurnal,1974.-t.27(№1), s.18-25.

[4] Gamayunov N.I. Reshenie m-uravnenii perenosa. –V sb.: Matematicheskie i fizicheskie voprosy teplo- i massoobmena. Minsk, 1973, s. 73-86.

[5] Khairullin E.M., Əmir E.M. Dvukhmernaya osobaya granichnaya zadacha teplo- i massoobmena. Trudy Satpaevskikh chtenii «Innovatsionnye resheniya traditsionnykh problem:inzheneriya i tekhnologii», Almaty, 2018.-S.1089-1092.

[6] Khairullin E.M., Tuleshova G.A., Shakulikova A.T. Ob odnoi granichnoi zadache teplo- i massoobmena. Vestnik KazNITU, 2019. - N4, c.510-516.

Е.М. Хайруллин*, Г.А. Тулешева, А.Т. Шакуликова
Satbayev University, Алматы, Қазақстан
*e-mail: khairullin_42_42@mail.ru

ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТА ҮШІНШІ РЕТТІ НОРМАЛЬ ТУЫНДЫЛАРЫ БАР ЖЫЛУ ЖӘНЕ МАССА АЛМАСУ ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ БІР ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІ

Андатпа. Шекаралық шартта үшінші ретті нормаль туындылары бар жылу және масса алмасу теңдеулерінің бір шекаралық есебі қарастырылып, осындай шеттік есептерге келтіру кезіндегі жылу және масса алмасудың кейбір шекаралық есептері келтіріледі. Есептің шешімі қосқабат жылу потенциалы түрінде ізделінеді. Гипержазықтықта ізделінетін функцияның үшінші ретті нормаль туындыларының шектерін табу жөнінде лемма келтірілген. Шекаралық шарттарды пайдаланып, жылуөткізгіштік операторлары арқылы интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі (ИДТЖ) алынған. Белгілі бір шарттар орындалғанда, ИДТЖ-нің характеристикалық бөлігінің шешімі Фурье - Лаплас интегралдық түрлендірулері арқылы табылған. ИДТЖ-сі регулярлау әдісімен Вольтерр-Фредгольм интегралдық теңдеулер жүйесіне келтірілген. Шекаралық шартта үшінші ретті нормаль туындылары бар және белгілі бір шарттар орындалғанда, жылу және масса алмасу шеттік есебінің шешімі бар болу жөнінде теорема келтірілген.

Негізгі сөздер: жылу және масса алмасу, шеттік есеп, үшінші ретті нормаль туындылар, шешілу шарттары, регулярлау.

Y. Khairullin*, G. Tulesheva, A. Shakulikova
Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: khairullin_42_42@mail.ru

ABOUT ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF HEAT AND MASS TRANSFER WITH NORMAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER IN THE BOUNDARY CONDITION

Abstract. A boundary value problem is considered for the equations of heat and mass transfer when one of the boundary conditions contains normal derivatives of the third order, to which a certain problem of heat and mass transfer in drying processes is reduced. The solution of the boundary value problem is sought in the form of the thermal potential of a double layer. A lemma on finding the limits of the third order normal derivatives is given. Using the boundary conditions, a system of the integro-differential equations (SIDE) with various heat conduction operators is obtained. A characteristic part of SIDE is solved by the method of integrated transformations of Fourier-Laplace when performing a condition of solvability. By the method of regularization of SIDE it is reduced to the system of the integrated equations of Volterra-Fredholm. A theorem of solvability of a boundary value problem is given under the condition of solvability of the heat and mass transfer equations with normal derivatives in the boundary conditions.

Keywords: heat and mass transfer, boundary value problem, third-order normal derivatives, solvability conditions, regularization.