

<sup>1</sup>О. Хабидолда\*, <sup>2</sup>С.К. Ахмедиев, <sup>2</sup>Б.С. Адекенов,  
<sup>2</sup>А.А Ербосынов, <sup>2</sup>Д.Б. Бижамбеков

<sup>1</sup>Карагандинский университет имени Е.А Букетова, Караганда, Казахстан

<sup>2</sup>Казахстанский многопрофильный институт реконструкция и развития при  
Карагандинском государственном техническом университете,  
Караганда, Казахстан. \*e-mail: oka-kargtu@mail.ru

## РАСЧЕТ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

**Аннотация.** В данной работе выполнено исследование работы ортотропных плит с системой поперечных и продольных элементов усиления, образующих конструктивную ортотропию.

Для анализа напряженно-деформированного состояния подобных конструкций применен известный вариационный метод Бубнова-Галеркина.

Произведен сравнительный анализ результатов, полученных двумя путями: расчет по фактическим значениям жесткостных характеристик, расчет по условной изгибаемой жесткости. Расчет подобными двумя способами дает достаточно близкие к друг другу результаты.

Предлагаемая методика может найти применение при «первичных» «безмашинных» методах расчета конструктивно-ортотропных плит с различными размерами в плане и с иными граничными условиями.

**Ключевые слова:** плиты, конструктивная ортотропия, вариационный метод, приведенная изгибаемая жесткость, сравнительный анализ.

**Введение.** В современной технике использование композиционных материалов является экономически и технологически обоснованным. Одной из важных задач в механике композитов является расчет на прочность ортотропных конструкций.

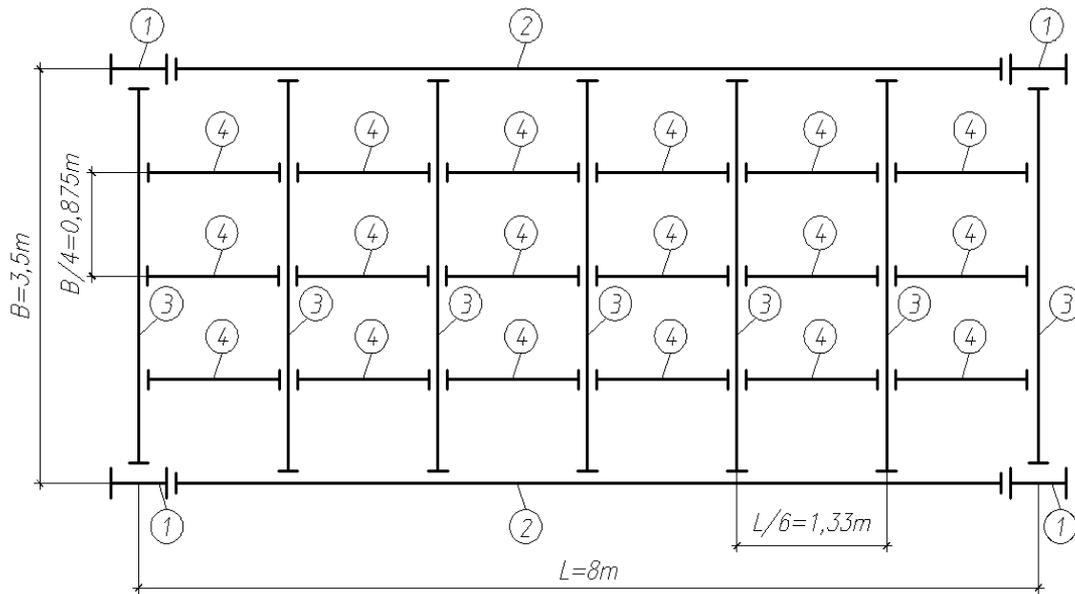
В решении этих задач широкое распространение получил численный метод конечных элементов (МКЭ), основанный на различных формулировках. Большинство авторов МКЭ формулируется в виде метода перемещений [1–5]. Решения МКЭ для изотропных тел достаточно легко модифицируются и используются для ортотропных тел [6].

Объемные конечные элементы на основе соотношений теории упругости без дополнительных гипотез о деформировании нормали использованы в работах [7, 8].

Кроме того, можно отметить следующие методы расчета ортотропных конструкций. Например, в работе [9] предложен алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочек из ортотропных материалов.

При проектировании проезжей части различных мостовых сооружений (путепроводов, переездов, и так далее) возникает необходимость в конструировании их настилов, соответствующих высоким уровням жесткости, (для исключения их так называемой «зыбкости») [10, 11].

В этих условиях в качестве конструкции проезжей части приемлимым является применение конструктивно ортотропных плит, представляющих собой стальной лист толщиной «*t*» подкрепленных системой ортогонально расположенных перекрестных элементов (балок) (рис.1). При этом необходимо исследовать напряженно-деформированное состояния подобных конструкций.



1-вертикальные стойки (прокатный двутавр №50); 2-продольные элементы (балок) (прокатный двутавр №45); 3-поперечные элементы (балок) (прокатный двутавр №30); 4-подкрепляющие ребра (полоса 14x3 см).

Рис. 1. Геометрическая и конструктивная схема ортотропной плиты

**Методы.** Расчетные жесткостные характеристики конструктивно ортотропных плит с односторонними перекрестно расположенными ребрами приведены в [12, 13] и имеют вид:

$$D_x = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EJ_{1y}}{t_1}; \quad D_y = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EJ_{2y}}{t_2}$$

$$D_{xy} = D_k^0 = \frac{Gt^3}{12} + \frac{EJ_{1k}}{t_1\delta}; \quad D_\mu = D_1 = \mu D_x = \mu D_y \quad (1)$$

$$\delta = 1 - \frac{t_1^2 J_{1y} (t_1 J_{2k} - t_2 J_{1k})}{t_2 J_{2k} (t_1^2 J_{1y} + t_2^2 J_{2k})},$$

здесь  $J_{1k}, J_{2k}$  – соответствующие моменты кручений элементов 4 и 3 (рис.1);

$J_{1y}, J_{2y}$  – соответствующие осевые моменты инерции элементов 4 и 3 относительно по их центральных осей, параллельных осям  $x, y$  соответственно (рис. 1):

$$t_1 = \frac{B}{4} = \frac{3.5}{4} = 0.875 \text{ – шаг элементов «4»}; \quad t_2 = \frac{L}{6} = \frac{8}{6} = 1.333 \text{ – шаг элементов «3»};$$

$t = 20 \text{ мм}$  – толщина металлического плиты настила.

Для плиты, приведенной на рисунке 1 по формулам (1) получены следующие значения;

$$D_x = 17.1452 \cdot 10^2 \text{ кНм}; \quad D_y = 107.93 \cdot 10^2 \text{ кНм};$$

$$D_1 = 5.1436 \cdot 10^2 \text{ кНм}; \quad D_k = D_{xy} = 3.57 \cdot 10^2 \text{ кНм}. \quad (1a)$$

Поверхностная нагрузка на плиту с учетом коэффициента перегрузки и динамического эффекта от движения по сооружению подвижной транспортной нагрузки средней величины составляет  $q = 52.5 \text{ кН} / \text{м}^2$ .

Для расчета рассматриваемой плиты (рис.1) применим вариационный метод Бубнова-Галеркина [14, 15]. Сложностью в этом случае является отыскание приведенных изгибных жесткостей, отвечающих реальной работе конструктивно ортотропной плиты.

Искомую функцию прогибов  $W = W(x, y)$  будем искать в виде:

$$W = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (2)$$

где  $a_i$  – неопределенные коэффициенты,  $\varphi_i$  – аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям закрепления кромок плиты (рис.2) – защемление по контуру.

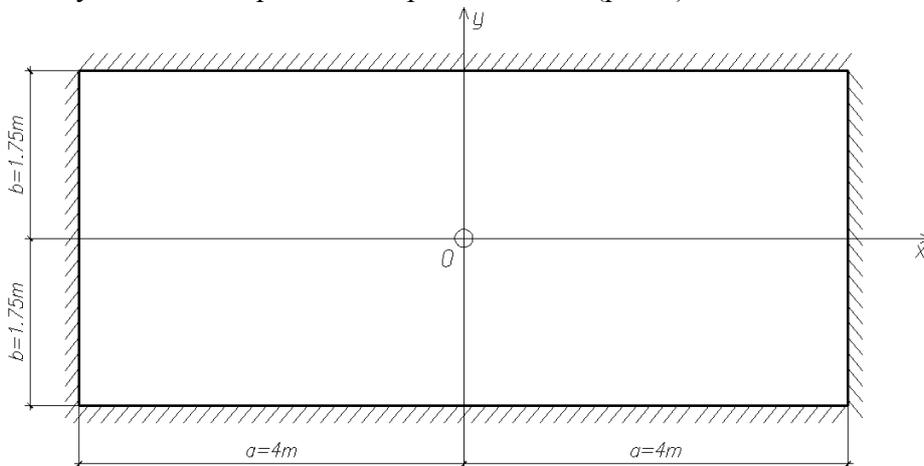


Рис. 2. Расчетная схема плиты

Граничные условия (рис.2) записывается в виде:

а) при  $x = \pm a$ ;  $w = 0$ ;  $\partial w / \partial x = 0$ , б) при  $y = \pm b$ ;  $w = 0$ ;  $\partial w / \partial y = 0$ .

Аппроксимирующие функции примем в виде степенного ряда:

$$\varphi_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2; \quad \varphi_2 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^3; \quad \varphi_3 = (x^2 - a^2)^3 (y^2 - b^2)^2 \quad (3)$$

Исходное дифференциальное уравнение ортотропных плит имеет вид [13, 15]

$$\left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{q}{D_x} \right) = 0$$

или

$$\nabla^4 W - \frac{q}{D_x} = 0 \quad (4)$$

Коэффициенты ортотропии (с учетом значений (1)) равны:

$$\alpha = \frac{2(D_1 + 2D_{xy})}{D_x} = 1.453; \quad \beta = \frac{D_y}{D_x} = 6.295 \quad (5)$$



$$\delta = 20.8051a^5b^5(b^4 + 0.5714\alpha a^2b^2 + \beta a^4); \quad \Delta q = \frac{1.1378a^5b^5q}{D_x} \quad (12)$$

С учетом значений (5) выражение (12) получим (при  $q = 52.5 \text{ кН/м}^2$ ):

$$\delta = 34557.73; \quad \Delta q = \frac{59.7345}{D_x} \quad (13)$$

По выражению (9) вычисляем значение коэффициента (с учетом выражения (13)):

$$a = \frac{\Delta q}{\delta} = \frac{59.7345}{4557.73} = \frac{0.00173}{D_x} \quad (14)$$

Подставляя значение (14) в уравнение (2), получим (с учетом выражения (8)):

$$W = a \cdot \varphi = \frac{0.00173}{D_x} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \quad (15)$$

где,  $W$  – искомая функция прогибов.

Для плиты (рис.1) ( $D_x = 17.1452 \cdot 10^2 \text{ кНм}$ ,  $a = 4 \text{ м}$ ,  $b = 1.75 \text{ м}$ ) при  $x=y=0$  по уравнению (15) получим:

$$W = W_{\max} = 0.00242 \text{ м} = 0.242 \text{ см} = 2.42 \text{ мм} \quad (16)$$

Расчет по пути «2»: В выражениях (10, 12) принимаем  $D_x = D_{red}$ ,  $\alpha = \beta = 1$ . Тогда вместо (15) получим:

$$W = \frac{2.8711(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{D_{red}(b^4 + 0.5714a^2b^2 + a^4)} \quad (17)$$

В выражении (17) неопределенной остается величина приведенной (условной) цилиндрической жесткости  $D_{red}$ . Для ее определения используем теорию прочности сопротивления материалов по гипотезе удельной потенциальной энергии формообразования [16], те есть:

$$D_{red} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + 3D_{xy}^2} \quad (18)$$

Подставляя в выражение (18) значения (1а), получим

$$D_{red} = 10^2 \sqrt{(17.1452)^2 + (107.93)^2 + 3(3.57)^2} = 109.4581 \cdot 10^2 \text{ кНм} \quad (19)$$

По значению (19) можно определить приведенную толщину настила проезжей части  $t_{red}$  для фиктивной изотропной стальной плиты, эквивалентной по прочности заданной конструктивно ортотропной плиты (рис.1).

$$t_{red} = \sqrt[3]{\frac{12(1-\mu)D_{red}}{E}} = \sqrt[3]{\frac{12(1-0.3)^2 \cdot 109.4581 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^8}} = 0.0817;$$

$(t_{red} = 0.0817 м = 81,7 мм) > (t_0 = 20 мм)$  ( $t_0 = 20 мм$  – фактическая толщина стальной плиты настила проезжей части мостового переезда).

Представляя значения (19) в выражения (17), получим значение наибольшего прогиба плиты ( $x = y = 0$ ,  $a = 4 м$ ,  $b = 1.75 м$ )

$$W_{max} = \frac{2.8711a^4b^4}{D_{red}(b^4 + 0.5714a^2b^2 + a^4)} = 0.002155 м = 2.155 мм \quad (20)$$

**Результаты и обсуждение.** Сравнивая значения (16) и (20) видим, что конструктивно ортотропные плиты можно рассчитывать как вариационным на основе метода Бубнова-Галеркина как по фактическим параметрам ортотропии (коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  – выражения (5)), так и по приведенной (условной) цилиндрической жесткости  $D_{red}$  (выражение (18)). Разница в значениях прогиба  $W_{max}$  (около 10%) объясняется малым числом членов аппроксимирующих функций.

Можно определить значение минимально необходимой цилиндрической жесткости  $D_x$  из условия нормативно требуемой жесткости плиты

( $W_{max}/l = 1/1000$ ); отсюда ( $W_{max}^* = 8/1000 = 0.8 см$ ) тогда из выражения (15) при  $x=y=0$ , имеем:

$$W_{max} = \frac{0.00173a^4b^4}{D_x} \quad (21)$$

Приравнивая значения  $W_{max} = W_{max}^*$ , получим выражение:

$$D_x = \frac{0.00173a^4b^4}{0.008} = 0.21625a^4b^4 \quad (22)$$

При ( $a = 4 м$ ,  $b = 1.75 м$ ) по выражению (22) получим  $D_x = 0.21625 \cdot (4)^4 \cdot (1.75)^4 = 5.192 \cdot 10^2 < D_x^* = 17.1452 \cdot 10^2$  ( $D_x^* = 17.1452 \cdot 10^2$  – значение принятое для плиты (рис.1)).

**Выводы.** В данной работе показана эффективность расчета конструктивно-ортотропной плиты проезжей части мостового переезда вариационным методом Бубнова-Галеркина. Достоверность результатов подтверждено разницей в значениях прогиба  $W_{max}$  (около 10%), это объясняется малым числом членов аппроксимирующих функций.

Принятые в расчете конкретные геометрические и физико-механические характеристики несущих конструкций и подкрепляющих ребер стального настила (плиты) с большим запасом обеспечивают ее прочность, обусловленную требованиями норм мостостроения.

Данную методику можно распространить на подобные конструктивно ортотропные плиты с иными граничными условиями, схемами внешнего нагружения и структурой подкрепляющих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Расчет ортотропных конструкций вариационным методом на основе трехмерных функций с конечными носителями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 2. – С. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11.
- [2] Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета оболочек средней толщины // Вестник Казанского технического университета. – 2013. – Т. 16, № 9. – С. 256–261.
- [3] Giamperi A., Perego U. An interface finite element for the simulation of localized membrane bending deformation in shells // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* – 2011. – Vol. 200. – № 29–32. – P. 2378–2396.
- [4] Серпик И.Н. Эффективный конечно-элементный анализ плит Тимошенко с исключением заклинивания изгибных деформаций // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2010. – № 10. – С. 8–17.
- [5] Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. Исследование устойчивости упругих пластин и оболочек при помощи конечно-элементного моделирования // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений – 2011. – № 1. – С. 58–65.
- [6] Голованов А.П., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций – М.: Физматлит. 2006. – 392 с.
- [7] Hall K.J., Potirniche G.P. A three-dimensional edge-crack finite – element for fracture mechanics applications // *International Journal of Solids and Structures.* – 2012. – Vol. 49. – No. 2. – P. 328–337.
- [8] Trach Y., Burdekin F.M. A three dimensional analysis of fracture mechanics test pieces of different geometries. Pt 1. Stress-state ahead of the crack tip // *International Journal Pressure Vessels and Pip.* – 2012. – No. 93–94. – P. 42–50.
- [9] Семенов А.А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук. – СПб., 2014.
- [10] Богданов Г.И., Владимирский С.Р., Козьмин Ю.Г., Кондратов В.В. Проектирование мостов и труб; под ред. Ю.Г. Козьмина. – М.: Маршрут, 2009. – 460с.
- [11] Владимирский С.Р. Современные методы проектирования мостов. – СПб.: ПапиРус, 1998. – 469с.
- [12] Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений; под ред. А.А. Уманского. – М.: Стройиздат, 1972. – 416 с.
- [13] Нагрузка и воздействия на здания и сооружения /В.Н. Гордеев и др.; под общ. ред. Перельмутера А.В. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 528 с.
- [14] Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
- [15] Справочник по теории упругости; под ред. П.М. Варвака, А.Ф. Рябова. – Киев: Будівельник, 1991. – 418 с.
- [16] Любошиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. – Минск, 1969. – 464 с.

REFERENCES

- [1] Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. Calculation of orthotropic constructions by a variation method on the basis of three-dimensional functions with final carriers. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 195–207. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.11
- [2] Berezhnoj D.V., Sagdatullin M.K. Trehmernyj konechnyj jelement dlja rascheta obolochek srednej tolshhiny // *Vestnik Kazanskogo tehničeskogo universiteta.* – 2013. – T. 16, № 9. – С. 256–261.
- [3] Giamperi A., Perego U. An interface finite element for the simulation of localized membrane bending deformation in shells // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* – 2011. – Vol. 200. – № 29–32. – P. 2378–2396.
- [4] Serpik I.N. Jefferktivnyj konechno-jelementnyj analiz plit Timoshenko s iskljucheniem zaklinivanija izgibnyh deformacij // *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Stroitel'stvo.* – 2010. – № 10. – С. 8–17.
- [5] Manujlov G.A., Kosicyn S.B., Begichev M.M. Issledovanie ustojchivosti uprugih plastin i obolochek pri pomoshhi konechno-jelementnogo modelirovanija // *Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij* – 2011. – № 1. – С. 58–65.
- [6] Golovanov A.P., Tjuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. Metod konechnyh jelementov v statike i dinamike tonkostennyh konstrukcij – М.: Fizmatlit. 2006. – 392 s.
- [7] Hall K.J., Potirniche G.P. A three-dimensional edge-crack finite – element for fracture mechanics applications // *International Journal of Solids and Structures.* – 2012. – Vol. 49. – No. 2. – P. 328–337.

- [8] Trach Y., Burdekin F.M. A three dimensional analysis of fracture mechanics test pieces of different geometries. Pt 1. Stress-state ahead of the crack tip // International Journal Pressure Vessels and Pip. – 2012. – No. 93–94. – P. 42–50.
- [9] Semenov A.A. Geometricheski nelinejnaja matematicheskaja model' rascheta prochnosti i ustojchivosti ortotropnyh obolochecnyh konstrukcij: dis. ... kand. tehn. nauk. – SPb., 2014.
- [10] Bogdanov G.I., Vladimirskij S.R., Koz'min Ju.G., Kondratov V.V. Proektirovanie mostov i trub; pod red. Ju.G. Koz'mina. – M.: Marshrut, 2009. – 460s.
- [11] Vladimirskij S.R. Sovremennye metody proektirovaniya mostov. – SPb.: PapiRus, 1998. – 469s.
- [12] Spravochnik proektirovshhika promyshlennyh, zhilyh i obshhestvennyh zdaniy i sooruzhenij; pod red. A.A. Umanskogo. – M.: Strojizdat, 1972. – 416 s.
- [13] Nagruzka i vozdeystvija na zdaniya i sooruzheniya /V.N. Gordeev i dr.; pod obshh. red. Perel'mutera A.V. – M.: Izd-vo ASV, 2009. – 528 s.
- [14] Slivker V.I. Stroitel'naja mehanika. Variacionnye osnovy. – M.: Izdatel'stvo Associacii stroitel'nyh vuzov, 2005. – 736 s.
- [15] Spravochnik po teorii uprugosti; pod red. P.M. Varvaka, A.F. Rjabova. – Kiev: Budivel'nik, 1991. – 418 s.
- [16] Ljuboshic M.I., Ickovich G.M. Spravochnik po soprotivleniju materialov. – Minsk, 1969. – 464 s.

<sup>1</sup>О. Хабидолда\*, <sup>2</sup>С.К. Ахмедиев, <sup>2</sup>Б.С. Адекенов,  
<sup>2</sup>А.А. Ербосынов, <sup>2</sup>Д.Б. Бижамбеков

<sup>1</sup>Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды, Қазақстан  
<sup>2</sup>Қарағанды мемлекеттік техникалық университет қарамағындағы Қазақстан көп бейінді қайта құру және дамыту институты, Қарағанды, Қазақстан  
\*e-mail: oka-kargtu@mail.ru

### **КОНСТРУКТИВТІ ОРТОТРОП ПЛИТАЛАРЫН ВАРИАЦИЯЛЫҚ ӘДІСПЕН ЕСЕПТЕУ**

**Аңдатпа.** Бұл мақалада конструктивтік ортотропияны құрайтын көлденең және бойлық күшейту элементтері жүйесі бар ортотропты плиталардың жұмысын зерттеу жүргізілді.

Осындай конструкциялардың кернеулі – деформацияланған жағдайын талдау Бубнов-Галеркиннің белгілі вариациялық әдісімен орындалған.

Екі жолмен алынған нәтижелердің салыстырмалы талдауы жүргізілді: қатқыл сипаттамалардың нақты мәндері бойынша есептеу, шартты иілу қаттылығы бойынша есептеу. Осындай екі тәсілмен есептеу бір-біріне жақын нәтижелер береді.

Ұсынылып отырған есептеу әдістемесі болашақта әртүрлі өлшемдері бар және басқа шекаралық жағдайларда конструктивті ортотропты плиталарды есептеудің "машинасыз" әдістерінде пайдалануға болады.

**Негізгі сөздер:** конструктивті ортотропия плиталары, вариациялық әдіс, келтірілген иілу қаттылығы, салыстырмалы талдау.

<sup>1</sup>O. Khabidolda\*, <sup>2</sup>S.K. Akhmediyev, <sup>2</sup>B.S. Adekenov,  
<sup>2</sup>A.A. Yerbosynov, <sup>2</sup>D.B. Bizhambekov

<sup>1</sup>Ye.Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan  
<sup>2</sup>Kazakh multidisciplinary reconstruction and development institute at Karaganda State Technical University. \*e-mail: oka-kargtu@mail.ru

### **CALCULATION OF STRUCTURALLY ORTHOTROPIC DECKS WITH VARIATION METHOD**

**Abstract.** In this paper, there was an executed investigation of the behavior of orthotropic decks with the system of cross and side stiffeners forming structural orthotropy.

In order to conduct an analysis of the stress-strain behavior of such structures, the Bubnov-Galerkin variation method has been used.

Comparative analysis of results, received in two ways has been conducted: calculation according to actual values of stiffness properties, calculation according to relative bending stiffness. It was shown, that calculation in such two ways gives sufficiently close results to each other.

The suggested calculation method can be applied while “primary “non-mechanic” calculation methods of structurally orthotropic decks with different sizes in the plan and other boundary conditions.

**Keywords:** structurally orthotropic decks, variation method, given bending stiffness, comparative analysis.