МРНТИ 14.35.07 https://doi.org/10.51301/vest.su.2021.i2.11

А.К. Искакова*, М.Ж. Байсалова
Алматинский университет энергетики и связи имени Г.Даукеева, Алматы, Казахстан
*e-mail: akzholtay.iskakova@mail.ru

ДВЕ ВЕТВИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Аннотация. В статье приводятся две основные задачи интегрального исчисления в их прикладном аспекте, которые вызывают живой и непрекращающийся интерес, проявляемый математиками и инженерами. Рассматривается вопрос о возникновении интегрального исчисления, на примере задачи о вычислении площадей и задачи о вычислении первообразных. Эти задачи привели к двум ветвям интегрального исчисления: теории определенных интегралов и теории неопределенных интегралов. Интегральное исчисление является одной из самых сложных тем математического анализа, так как процесс вычисления интегралов в целом не поддается формальной систематизации, в то же время является мощным средством решения прикладных задач. Актуальность статьи в первую очередь в содержательном раскрытии основных понятий элементов математического анализа, в потребности в соответствующем математическом обеспечении других дисциплин поскольку в основном практическое приложение интеграла используется в физике и технике, а также при нахождении объемов геометрических тел и при вычислении площадей разнообразных фигур. Статья интересна с точки зрения повышения мотивации к изучению высшей математики на технических специальностях. Таким образом знание связи интегрального исчисления с потребностями практики необходимо для глубокого усвоения теории, развития конкретного математического мышления, привития интереса к математическим дисциплинам.

Ключевые слова: задача о квадратуре, задача о кубатуре, первообразная, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление.

Введение. В тесной и неразрывной связи с дифференциальным исчислением, являясь его естественным продолжением, стоит интегральное исчисление. Подобно тому как на возникновение дифференциального исчисления сильное влияние оказали две задачи: задача о касательной и задача о скорости, то точно так же интегральное исчисление возникло из двух задач. К числу тех задач, которые возникли при зарождении геометрии как науки, принадлежит, прежде всего, задача о вычислении площадей. Эта задача имеет не только теоретический, но и практический интерес. И не случайно начала геометрии были заложены в Древнем Египте. Ежегодные бурные разливы Нила, смывая границы земельных участков и изменяя их форму, делали актуальным вопрос о вычислении площадей.

Методы исследования. Задача о квадратуре площадей есть первая задача интегрального исчисления. В наше время уже в элементарной геометрии вычисляются площади простейших фигур, как, например, треугольника и трапеции. Метод, который древние геометры применяли при вычислении площадей, состоял в следующем: необходимо было построить квадрат, равновеликий площади данной фигуры. Если это удавалось, то задача считалась решенной. Благодаря этому методу и в настоящее время задачу о вычислении площади данной фигуры называют задачей о квадратуре площади фигуры. По аналогии объем данного тела называется его кубатурой, так как древние геометры, чтобы вычислить объем тела, строили равновеликий этому телу куб.

Умея вычислять площадь треугольника, мы можем вычислить площадь любого многоугольника. Для этого достаточно разбить его на систему треугольников, что можно сделать разнообразными способами, например, проводя всевозможные диагонали из одной какой-нибудь его вершины (Рис.1).

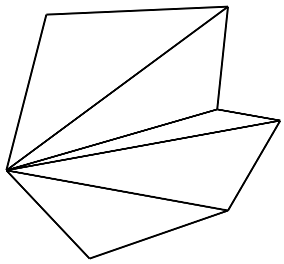

Рисунок 1. Многоугольник

Но если в этом случае не возникают особые теоретические трудности при вычислении площадей, ограниченных отрезками прямых линий, то задача усложняется, в случае, когда в число границ данной фигуры входят не только отрезки прямых, но и дуги кривых линий. Так задача о квадратуре круга решается в элементарной геометрии с большими трудностями, требуя для своего решения понятия о пределе. Эти трудности возрастают, если границами фигуры служат более сложные кривые.

Если необходимо измерить площадь, ограниченную кривыми линиями, то мы должны узнать, сколько и каких частей квадрата, принятого за единицу меры, можно вместить в данной площади. Но на какие бы малые квадраты мы не разделили квадрат, принятый за единицу, и сколько бы и как бы мы их не размещали эти малые квадраты, мы всегда будем получать фигуру, ограниченную не кривой линией, а ломаной. Следовательно, площадь, ограниченная кривыми линиями, никогда не может быть полностью заполнена частями квадрата. Аналогично, тело, ограниченное кривыми поверхностями, не может быть заполнено никакими частями куба.

Древние геометры не могли преодолеть трудностей, вытекающих из этого факта. Хотя они и вычисляли площади и объемы более или менее сложных фигур, но они не имели общего метода, который мог быть применен для вычисления любой произвольно данной площади. Это метод был выработан математикой, которая опиралась на понятие предела. Пользуясь понятиями предела, координат и функции, стало возможным облечь в аналитическую форму геометрическую задачу о квадратуре площади.

Преобразованная таким образом, эта задача привела к понятию определенного интеграла. Возник новый раздел математики под названием теории определенных интегралов. Задачи о квадратуре и кубатуре являются теперь частными случаями приложения этой теории. Здесь интересно то, что, только облекая в аналитическую форму геометрическую задачу о квадратуре, можно легко перейти к понятию определенного интеграла, потому что с геометрической точки зрения теория определенных интегралов есть не что иное, как замаскированная задача о квадратуре площади. Поставленная в глубокой древности, эта задача служит предметом постоянного исследования математиков, но теперь ее геометрическая сущность скрыта под теми аналитическими формами, в которые ее облекают.

Рассмотри еще одну задачу интегрального исчисления. Эта задача связана с понятием производной: всякая функция, производная которой равна данной функции, называется первообразной, или интегралом, данной функции. От термина интеграл произошло название интегрального исчисления.

Так, например, как известно,

$$\frac{dsinx}{dx} = cosx, \quad \frac{dcosx}{dx} = -sinx.$$

Следовательно, синус есть первообразная косинуса. В свою очередь косинус есть первообразная минус синуса.

Функция $arcsinx$ служит интегралом, или первообразной, для $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, потому что

$$\frac{darcsinx}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как $\frac{de^x}{dx} = e^x$, то показательная функция e^x является первообразной для самой себя.

Введя понятие функции, мы должны рассмотреть две обратные друг другу задачи: задачу нахождения производной данной функции и задачу отыскания интеграла данной функции. Обе эти задачи могут быть поставлены для любой функции. Так, например, если нам дана функция x^5, то, с одной стороны, мы можем найти ее производную, и это будет задача дифференциального исчисления. Как известно,

$$\frac{dx^5}{dx} = 5x^4.$$

Но, с другой стороны, мы можем искать функцию, производная которой равнялась бы данной функции x^5, то есть можем искать такую функцию $f(x)$, которая удовлетворяла бы уравнению:

$$\frac{df(x)}{dx} = x^5.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция $\frac{x^6}{6}$. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^6}{6}\right) = x^5.$$

Следовательно, функция $\frac{x^6}{6}$ есть интеграл функции x^5.

Задача о вычислении интегралов данной функции и есть вторая задача интегрального исчисления. Таким образом, мы видим, что задача: найти производную данной функции, есть задача дифференциального исчисления, а задача: найти интеграл данной функции уже является задачей интегрального исчисления.

Известно, что всякий переход от данной функции к ее производной называется дифференцированием. Аналогично, всякий переход от данной функции к ее интегралу называется интегрированием. Мы знаем, что действие интегрирования обратно действию дифференцирования. Действительно, предположим, что даны две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условию $\varphi(x) = \psi'(x)$. Возможны два случая:

1) дана функция $\varphi(x)$. Требуется вычислить функцию $\psi(x)$. Это задача дифференциального исчисления.

2) дана функция $\psi(x)$. Требуется вычислить функцию $\varphi(x)$. Это задача интегрального исчисления.

Понятия действий дифференцирования и интегрирования показывают, что математический анализ, подобно элементарной алгебре, изучает различные действия, но в отличие от алгебры, он изучает действия не над числами, а над функциями.

К вычислению интегралов приводит бесчисленное множество задач. Рассмотрим одну из них. Пусть по прямой, которую примем за ось *X*, движется точка *M*. Если через ***s*** обозначим путь точки *M*, то есть ее абсциссу, то *s* будет некоторой функцией времени *t*. Пусть $s = f(t)$. Как известно, скорость *v* точки равна производной от *s* по *t*:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Следовательно, если известна зависимость *s* от *t*, то вычисление скорости точки приводится к вычислению производной, то есть к задаче дифференциального исчисления. Но предположим, что зависимость пути *s* от времени *t* нам не известна. Требуется найти путь *s*, зная скорость точки в каждый момент времени, а именно пусть $v = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - данная известная функция. переписав это равенство в виде:

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(t).$$

Мы видим, что s есть интеграл функции $\varphi(t)$, а потому задача о вычислении пути, проходимого точкой с заданной скоростью, есть задача интегрального исчисления.

В общем случае к вычислению соответствующих интегралов приводится всякая задача, в которой требуется найти закон изменения самой величины, зная закон, по которому меняется ее скорость.

Приведем еще пример, приводящий к вычислению интегралов как первообразных. Пусть s – прямолинейный путь, пройденный точкой, то есть s – абсцисса движущейся точки. Всякая движущаяся точка в каждый момент времени имеет не только скорость, но и ускорение, которое равно производной от скорости по времени. поэтому, обозначая скорость через v, а ускорение через a, имеем равенства:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Пусть дана задача: вычислить зависимость пути s от времени, проходимого точкой, если известно ускорение точки в каждый момент времени. Пусть $a = \psi(t)$, где $\psi(t)$ - данная известная функция. Переписав последнее равенство в виде: $\frac{dv}{dt} = \psi(t)$, имеем $dv = \psi(t)dt$, отсюда v интеграл от функции $\psi(t)$:

$$v = \int \psi(t)dt.$$

Предположим, что мы вычислили этот интеграл и нашли, что

$$\int \psi(t)dt = \varphi(t),$$

тогда имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = \varphi(t),$$

$$ds = \varphi(t)dt,$$

а потому s – интеграл функции $\varphi(t)$:

$$s = \int \varphi(t)dt = \int \left(\int \psi(t)dt\right)dt.$$

Из этого примера мы видим, что если ускорение дано как функция времени, то, чтобы вычислить путь s, мы должны вычислить два интеграла: сначала интеграл $\int \psi(t)dt$, а потом интеграл от этого интеграла.

Заключение. Мы рассмотрели две задачи, приведшие к возникновению интегрального исчисления: задачу о вычислении площадей и задачу о вычислении первообразных. Как мы видим, эти две задачи по своему содержанию глубоко различны, поэтому вполне естественно, что они привели к двум ветвям интегрального исчисления: из первой развилась та ветвь, которая называется «Теория определенных интегралов», вторая задача дала ветвь, названная «Теория неопределенных интегралов». Но хотя корни этих ветвей глубоко различаются, однако местами они настолько тесно переплетаются между собой, что составляют почти одно целое.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Искакова А.К., Ханжарова Б.С., Кокажаева А. On teaching of bases of real variable functions theory. // Вестник Карагандинского университета. -2017. -№1(85). С. 76-80.

[2] Искакова А.К., Байсалова М.Ж. О профессионально ориентированной подготовке специалистов в неязыковых вузах на примере математики. // II Всемирный конгресс в реальном и виртуальном режиме «Восток-Запад пересечения культур. -Япония, университет Киото, 2019. -II т. С. 484-489.

[3] Petrova M., Uteubayeva E.A., Kokhanover T.A. Didactic approach to the process of communicative competence formation. // Вестник Карагандинского университета. Серия Педагогика. -2020. № 4(100). С.79-85.

[4] Panaoura A., Michael-Chrysanthou P., Philippou A. Teaching the concept of function: definition and problem solving [Электронныйресурс]. -2016. P.440–445. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927/document.

[5] Сапрунова А.С. Историческое развитие интегрального исчисления. // Сборник трудов конференции «Методика преподавания математических и естественнонаучных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития» / -СПб, 2018. -С.189-192.

[6] Steele M., Hillen A., Smith M. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. // Journal of Mathematics Teacher Education/ -2013. -V.16, P.P.451–482.

[7] Синкевич Г.И. Историография математического анализа. // Сборник «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» Вып. 20./ -СПб.: Издательство СПбГАСУ, -2014. –С. 3-22.

[8] Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии: Развитие понятия о геометрическом пространстве. -2-е изд. -М.: URSS, 2021. -416с.

[9] Цейтен И.Г. История математики в древности и в Средние века. -пер. с фр. Изд. стереотип. -М.: URSS, 2019. -230с.

[10] Iskakova A., Iskakova An. Digital literacy - efficient system of professionalization of education // The American scholarly journal Cross-Cultural Studies: Education and Science (CCS&ES). Vermont, USA. -2019. -V. 4. -P.85-90.

[11] Искакова А.К., Ханжарова Б.С. Some of Methods Teaching the Theory valid Variable Functions. // XIX международная научно-практическая конференция «Современные концепции научных исследований». / -М.: Евразийский Союз ученых, 2015. -№10(19)/ Ч.4. -С.109-110.

[12] Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. -пер. с голл. -4-е изд. стереотип. -М.: URSS, 2010. -458с.

[13] Dubchak V., Manzhos E. The investigation of conditions of the extreme arrangement of several classical geometric figures with a common center by estimating the length of the line and the area of their divergence. // Slovak international scientific journal. Bratislava, Slovakia. -2021. =№49, -P.21-30.

[14] Antonov A. The physical reality and essence of imaginary numbers. // Norwegian Journal of development of the International Science. Oslo, Norway. -2017. -VOL.2. -№6. P.50-64.

[15] Tseeva L., Panesh B., Simbuletova R. Independent activity of students in the conditions of block-module teaching // Norwegian Journal of development of the International Science. Oslo, Norway. -2018. -VOL.6. -№17. -P.25-29.

REFERENCES

[1] Iskakova A.K., Khanzharova B.S., Kokazhaeva A. On teaching of bases of real variable functions theory. // Vestnik Karagandinskogo universiteta. -2017. -№1(85). S. 76-80.

[2] Iskakova A.K., Baisalova M.Zh. O professional'no orientirovannoi podgotovke spetsialistov v neyazykovykh vuzakh na primere matematiki. // II Vsemirnyi kongress v real'nom i virtual'nom rezhime «Vostok-Zapad peresecheniya kul'tur. -Yaponiya, universitet Kioto, 2019. -II t. S. 484-489.

[3] Petrova M., Uteubayeva E.A., Kokhanover T.A. Didactic approach to the process of communicative competence formation. // Vestnik Karagandinskogo universiteta. Seriya Pedagogika. -2020. № 4(100). S.79-85.

[4] Panaoura A., Michael-Chrysanthou P., Philippou A. Teaching the concept of function: definition and problem solving [Elektronnyi resurs]. -2016. P.440–445. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927/document.

[5] Saprunova A.S. Istoricheskoe razvitie integral'nogo ischisleniya. // Sbornik trudov konferentsii «Metodika prepodavaniya matematicheskikh i estestvennonauchnykh distsiplin: sovremennye problemy i tendentsii razvitiya» / -SPb, 2018. -S.189-192.

[6] Steele M., Hillen A., Smith M. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. // Journal of Mathematics Teacher Education/ -2013. -V.16, P.P.451–482.

[7] Sinkevich G.I. Istoriografiya matematicheskogo analiza. // Sbornik «Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm» Vyp. 20./ -SPb.: Izdatel'stvo SPbGASU, -2014. –C. 3-22.

[8] Rozenfel'd B.A. Istoriya neevklidovoi geometrii: Razvitie ponyatiya o geometricheskom prostranstve. -2-e izd. -M.: URSS, 2021. -416c.

[9] Tseiten I.G. Istoriya matematiki v drevnosti i v Srednie veka. -per. s fr. Izd. stereotip. -M.: URSS, 2019. -230s.

[10] Iskakova A., Iskakova An. Digital literacy - efficient system of professionalization of education // The American scholarly journal Cross-Cultural Studies: Education and Science (CCS&ES). Vermont, USA. -2019. -V. 4. -P.85-90.

[11] Iskakova A.K., Khanzharova B.S. Some of Methods Teaching the Theory valid Variable Functions. // XIX mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Sovremennye kontseptsii nauchnykh issledovanii». / -M.: Evraziiskii Soyuz uchenykh, 2015. -№10(19)/ Ch.4. -S.109-110.

[12] Van der Varden B.L. Probuzhdayushchayasya nauka: Matematika Drevnego Egipta, Vavilona i Gretsii. -per. s goll. -4-e izd. stereotip. -M.: URSS, 2010. -458s.

[13] Dubchak V., Manzhos E. The investigation of conditions of the extreme arrangement of several classical geometric figures with a common center by estimating the length of the line and the area of their divergence. // Slovak international scientific journal. Bratislava, Slovakia. -2021. =№49, -P.21-30.

[14] Antonov A. The physical reality and essence of imaginary numbers. // Norwegian Journal of development of the International Science. Oslo, Norway. -2017. -VOL.2. -№6. P.50-64.

[15] Tseeva L., Panesh B., Simbuletova R. Independent activity of students in the conditions of block-module teaching // Norwegian Journal of development of the International Science. Oslo, Norway. -2018. -VOL.6. -№17. -P.25-29.

А.Қ. Искакова*, М.Ж. Байсалова

Ғ.Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

*e-mail: akzholtay.iskakova@mail.ru

ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУДІҢ ЕКІ ТАРМАҒЫ

Андатпа. Мақалада математиктер мен инженерлер қызығушылық тудыратын интегралды есептеудің негізгі екі мәселесі келтірілген. Интегралдық есептеулердің пайда болуы туралы мәселе аудандарды есептеу есебі мен алғашқы функцияларды есептеу есебінің мысалын қолдана отырып қарастырылады. Бұл есептер интегралдық есептеудің екі саласына әкелді: анықталған интегралдар теориясы және анықталмаған интегралдар теориясы. Интегралдық есептеу математикалық талдаудың ең күрделі тақырыптарының бірі болып табылады, өйткені интегралдарды есептеу процесі тұтастай алғанда жүйелеуге берілмейді, сонымен бірге қолданбалы есептерді шешудің қуатты құралы болып табылады. Мақаланың өзектілігі, ең алдымен, математикалық талдау элементтерінің негізгі ұғымдарының мазмұнды ашылуында, басқа пәндерді тиісті математикалық қамтамасыз ету қажеттілігінде, өйткені интегралдың практикалық мазмұны негізінен физика мен техникада, сондай-ақ геометриялық денелердің көлемін табу кезінде және әртүрлі фигуралардың аудандарын есептеу кезінде қолданылады. Мақала техникалық мамандықтарда жоғары математиканы оқуға деген ынтаны арттыру тұрғысынан қызықты. Сонымен қатар, интегралдық есептеулердің практиканың қажеттіліктерімен байланысын білу теорияны терең игеру, нақты математикалық ойлауды дамыту, математикалық пәндерге қызығушылықты ояту үшін қажет.

Негізгі сөздер: квадратура туралы есеп, кубатура туралы есеп, ауданды есептеу, дифференциалдық есептеу, интегралдық есептеу, алғашқы функция.

A.K. Iskakova*, M.Zh. Baisalova
Almaty University of Energy and Communications named after G.Daukeev, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: akzholtay.iskakova@mail.ru

TWO BRANCHES OF INTEGRAL CALCULATION

Abstract. The article presents two main problems of integral calculus in their applied aspect, which arouse a lively and continuing interest shown by mathematicians and engineers. The question of the origin of integral calculus is considered, using the example of the problem of calculating areas and the problem of calculating primordial ones. These problems led to two branches of integral calculus: the theory of definite integrals and the theory of indefinite integrals. Integral calculus is one of the most difficult topics of mathematical analysis, since the process of calculating integrals in general does not lend itself to formal systematization, at the same time it is a powerful tool for solving applied problems. The relevance of the article is primarily in the content disclosure of the basic concepts of the elements of mathematical analysis, in the need for appropriate mathematical support for other disciplines, since the practical application of the integral is mainly used in physics and engineering, as well as in finding the volumes of geometric bodies and in calculating the areas of various shapes. The article is interesting from the point of view of increasing motivation to study higher mathematics in technical specialties. Thus, knowledge of the connection of integral calculus with the needs of practice is necessary for a deep assimilation of the theory, the development of specific mathematical thinking, and instilling interest in mathematical disciplines.

Keywords: quadrature problem, cubature problem, antiderivative, definite and indefinite integrals.