УДК 517.9+539.3 https://doi.org/10.51301/vest.su.2021.v143.i1.12

[1]Л.А. Алексеева, [2]А.Н. Дадаева
[1]Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан
[2]Satbayev University, Алматы, Казахстан
e-mail: alexeeva@math.kz, dady1262@mail.ru

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОЭЛАСТОДИНАМИКИ

Аннотация. Рассматриваются нестационарные краевые задачи несвязанной термоупругости. Разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) в исходном пространстве-времени для решения нестационарных краевых задач термоупругости при плоской деформации. На основе метода обобщенных функций построены обобщенные решения краевых задач с использованием функции Грина для уравнения теплопроводности и тензора Грина уравнений Ламе при воздействии нестационарных силовых и тепловых источников различного вида. Получены интегральные представления решения краевых задач. Эти решения позволяют по известным граничным значениям и начальным условиям (перемещений, температуры, напряжений и теплового потока), определить термонапряженное состояние среды под воздействием различных силовых и тепловых нагрузок. Построены разрешающие граничные интегральные уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Ключевые слова: несвязанная термоупругость, фундаментальные решения, перемещения, температура, напряжения, тепловой поток, термоупругие ударные волны.

Введение. Развитие исследований по термоупругости связано с необходимостью разработки новых механических конструкции, элементы которых работают в условиях неравномерного и нестационарного нагрева (в авиационной и ракетной технике, в системе защиты ядерных реакторов, в ряде отраслей машиностроения и т.д.). Это приводит к появлению градиента температуры в среде и прочностных свойств материалов. Вследствие теплового удара некоторые материалы становятся хрупкими и разрушаются.

В 1956 г. вышла работа Био М. [1], в которой было впервые приведено полное обоснование основных соотношений и уравнений связанной термоупругости, опирающихся на законы термодинамики необратимых процессов. Этим же автором сформулированы основные вариационные принципы и разработаны некоторые методы решения уравнений термоупругости. В последовавших публикациях Новацкого В. [2], предложены различные приемы преобразования дифференциальных уравнений термоупругости с целью упрощения задачи. Новацкий В. дал обоснование моделей связанной и несвязанной термоупругости, рассмотрел целый класс квазстатических и динамических задач термоупругости.

В работах, посвященных динамическим задачам термоупругости, отдельно выделяются задачи о тепловом ударе (thermal shock problem). При постановке такой задачи предполагается, и что в начальный момент объект покоится, а в последующий происходит резкое изменение термоупругого состояния вследствие воздействии тепловых и силовых источников, как внешних, так и в самой среде.

Так, задача о распространении термоупругой волны в полупространстве благодаря мгновенному нагреву его границы для случая малых времен впервые рассмотрена Даниловской В.И. [3,4] и решена методом малых параметров.

Подробный обзор работ по термоупругости проведен в энциклопедии Hetnarski R. [5]. Помимо тем, посвященных температурным напряжениям, энциклопедия содержит статьи по смежным разделам, таким как теория упругости, теплопроводность, термодинамика, а также есть соответствующие разделы по прикладной математике и численным методам.

В работах [6,7] для решения краевых задач связанной и несвязанной термоэластодинамики разработан МГИУ. При решении этих задач построены ГИУ в пространстве преобразований Лапласа по времени. Одна из основных проблем метода ГИУ в пространстве преобразования Лапласа, которая достаточно хорошо известна, неустойчивость численных процедур обращения трансформант решений с ростом времени, что не позволяет в расчетах строить решения при даже небольших временах.

Для того чтобы избежать этих проблем здесь разрабатывается Метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) в исходном пространстве-времени для решения краевых задач термоупругости при плоской деформации.

1. Определяющие соотношения. Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом термодинамических параметров: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ, μ и термоупругими константами γ, η и κ. В декартовой системе координат такая среда описывается системой уравнений [2,8]:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij},_j-\rho\ddot{u}_i+F_i=0,\\ \Delta\theta-\kappa^{-1}\dot{\theta}+\eta\dot{u}_j,+Q=0,\quad j=1,...,N.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь $u_i(x,t)$ - компоненты вектора смещений $u(x,t)$, $u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j=\partial_j u_i$, $\theta(x,t)$- относительная температура, F_i- компоненты массовой силы $F(x,t)$, $Q(x,t)$ - мощность теплового источника, $N=1,2,3$.

Тензор напряжений σ_{ij}(x,t) связан с перемещениями законом Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij}=(\lambda u_{k,k}-\gamma\theta)\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\,.\tag{1.2}$$

Всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование в указанных пределах изменения.

Подставляя (1.2) в (1.1), получим замкнутую систему уравнений относительно $u(x,t)$ которую запишем в виде:

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)u_j+F_i=0,\tag{1.3}$$

где введены следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{gathered}L_{ij}=(\lambda+\mu)\partial_i\partial_j+(\mu\Delta-\rho\,\partial_t\partial_t)\delta_{ij}-\gamma\delta_{j(N+1)}\partial_i,\quad i=\overline{1,N}\\ L_{(N+1)j}=(\Delta-\kappa^{-1}\,\partial_t)\delta_{j(N+1)}-\eta\,(1-\delta_{j(N+1)})\partial_t\partial_j,\quad j=\overline{1,N+1}\,.\end{gathered}$$

Система смешанного гиперболо-параболического типа. Распространяющиеся в термоупругой среде волны могут быть ударными. Уравнение фронта волны F имеет вид:

$$det\{L_{ij}^2(\nu,\nu_t)\}=det\{L_{ij}^e(\nu,\nu_t)\}\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2=0\ ,\tag{1.4}$$

где L_{ij}^2- главная часть оператора $L_{ij}(\partial_x,\partial_t)$, содержащая только старшие производные второго порядка, а L_{ij}^e является дифференциальным оператором уравнений движения соответствующего упругого тела с параметрами (λ, μ, ρ).

Обозначим через $(\nu,\nu_t)=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N,\nu_t)$ - вектор нормали к F в R^{N+1}. Из (1.4) следует, что либо

$$\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2=0\,,\tag{1.5}$$

либо

$$det\{L^e_{ij}(\nu,\nu_t)\}=0. \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.5) описывает характеристическую поверхность классического параболического уравнения, которая имеет вид $t=const$ и не определяет волновой фронт в пространстве R^N. Уравнение (1.6) описывает волновые фронты F_t, движущиеся в R^N со скоростью:

$$c=\frac{|\nu_t|}{\|\nu\|}, \qquad c=c_j \qquad (j=1,2), \qquad (1.7)$$

где $\|\nu\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\nu_i^2}$, $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ - скорость объемных (дилатационных) упругих волн, $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$ - скорость сдвиговых волн. Следовательно волновые фронты (*термоупругие ударные волны*) в среде движутся со скоростью упругих волн.

Для того, чтобы сохранялись условия сплошности среды и $u(x,t)$ было решением (1.1), должны выполняться следующие условия на скачки на характеристических поверхностях [7]:

$$\left[u_j\right]_F=0, \qquad [\theta]_F=0, \qquad (1.8)$$

$$\nu_j\left[\sigma_{ij}\right]_F=\rho\nu_t\left[\dot{u}_i\right]_F 0, \quad \nu_j\left[\theta,_j-\eta\dot{u}_j\right]_F=\kappa^{-1}\nu_t\left[\theta\right]_F, \ i,j=\overline{1,N}.$$

Введем волновой вектор в R^N, $n=\frac{\nu}{\|\nu\|}$, направленный в сторону распространения ударной волны. Из этих равенств следуют условия на скачки на фронтах ударных волн F_t в R^N:

$$[u]_{F_t}=0, \qquad [\theta]_{F_t}=0, \qquad (1.9)$$

$$\lfloor\sigma_{ij}\rfloor_{F_t} n_j=-\rho c[\dot{u}_i]_{F_t}, \qquad (1.10)$$

$$n,_j\lfloor\theta,_j\rfloor_{F_t}=\eta n_j\lfloor\dot{u}_j\rfloor_{F_t}. \qquad (1.11)$$

Здесь n – волновой вектор, перпендикулярный F_t, направленный в сторону распространения волны. Равенство (1.9) является условием сохранения сплошности среды, (1.10) совпадает с известным законом сохранения импульса на фронтах ударных волн в упругих средах [9, 10].

Из (1.9) и (1.11) следует, что на волновых фронтах температура непрерывна, но ее градиент терпит скачок, пропорциональный скачку нормальной составляющей к фронту скорости смещений среды.

Будем называть решение уравнений (1.1), удовлетворяющее на волновых фронтах условиям (1.9) - (1.11), *классическим*.

2. Постановка краевых задач несвязанной термоупругости. Если задать на границе области нагрузки или в самом теле массовые силы это приводит к деформации в теле. при малых скоростях деформации в уравнении для температурного поля (1.1) можно пренебречь скоростью объемной деформации среды (η=0), тогда краевая задача распадается на две: определение температурного поля, после чего становится возможным определение поля перемещений и напряжений термоупругой среды. такую модель процессов называют *несвязанной термоупругостью* (*теорией температурных напряжений*).

Рассмотрим следующие краевые задачи для этой модели. Пусть термоупругая среда занимает область S^-, ограниченную замкнутой поверхностью ляпунова s с внешней нормалью $n(x)$. Уравнения движения среды в этой модели имеют вид [2]:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + F_i = 0,$$
$$\Delta\theta - \kappa^{-1}\dot{\theta} + Q = 0, \qquad i, j = 1,...,N. \tag{2.1}$$

Здесь $F_i = \rho G_i$, $G(x,t)$ - объемные силы в среде.

Заданы начальные условия (*условия коши*):

$$u_i(x,0) = u_i^0(x),\ \ \theta(x,0) = \theta^0(x),\ \ x \in (S^- + S);\ \ \dot{u}_i(x,0) = \dot{u}_i^0(x),\ x \in S^-, \tag{2.2}$$
$$u_i^0 \in C(S + S^-), \dot{u}_i^0 \in C(S^-).$$

Задача 1. На границе ($x \in S$) известны действующие нагрузка и тепловой поток:

$$\sigma_{ij}(x,t) n_j(x) = p_i\,(x,t),\quad \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} = q(x,t), \tag{2.3}$$

где $p_i\,(x,t),\quad q(x,t)$ - интегрируемые на S функции.

Задача 2. Для $x \in S$ заданы нагрузки и температура:

$$\sigma_{ij}(x,t) n_j(x) = p_i\,(x,t),\quad \theta(x,t) = \theta^S(x,t),\quad \theta^S(x,0) = \theta^0(x), \tag{2.4}$$
$$p_i \in C'(S \times [0,\infty)), \theta^S \in C(S \times [0,\infty)).$$

Задача 3. Для $x \in S$ заданы перемещения и температура:

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t),\ \ u_i^S(x,0) = u_i^0(x);\ \theta(x,t) = \theta^S(x,t),\ \ \theta^S(x,0) = \theta^0(x), \tag{2.5}$$
$$u_i^S \in C^1(S \times [0,\infty)),\ \ \theta^S \in C(S \times [0,\infty)).$$

Задача 4. Для $x \in S$ заданы перемещения и тепловой поток:

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t),\quad u_i^S(x,0) = u_i^0(x),\quad \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} = q(x,t), \tag{2.6}$$

$$u_i^S \in C^1(S \times [0,\infty)), q \in C'(S \times [0,\infty)).$$

Здесь $C(\ldots)$ - класс непрерывных на указанном множестве функций, $C'(\ldots)$ - кусочно-непрерывные ограниченные функции, $C^1(\ldots)$ – непрерывно-дифференцируемые функции.

На фронтах решения удовлетворяют условиям на скачки (1.7) - (1.9). Требуется найти перемещения, температуру, напряжения в среде.

Для решения задач используем метод обобщенных функций (МОФ) основные идей которого изложены в [11-14].

3. Постановка задачи в пространстве $D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$. Рассмотрим уравнения (2.1) в пространстве обобщенных вектор-функций:

$$D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right) = \hat{f}(x,t) = \left\{\hat{f}_i(x,t),\ i = \overline{1, N+1}\right\},$$

где $\hat{f}_i(x,t)$ - обобщенная функция, $\hat{f}_i(x,t) \in D'(R^{N+1})$. Введем характеристическую функцию области S^- :

$$H_S^-(x) = \begin{cases} 1, & x \in S^- \\ 1/2, & x \in S \\ 0, & x \notin S + S^-. \end{cases} \tag{3.1}$$

и следующие регулярные обобщенные функции:

$$\hat{u}_i(x,t) = u_i(x,t)\,H_S^-(x)\,H(t), \quad \hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)\,H_S^-(x)H(t)\,,$$

$H(t)$ – функция Хевисайда, $u(x,t),\, \theta(x,t)$ - классическое решение краевой задачи. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_S^-(x) = -n_i(x)\delta_S(x), \quad \frac{d}{dt}H(t) = \delta(t),$$

где сингулярная обобщенная функция $n_j(x)\delta_S(x)$ - простой слой на S [11], частные производные этих функций в $D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$ имеют вид**:**

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} H_S^-(x)H(t) - u_k n_i(x)\delta_S(x)H(t)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} H_S^-(x)H(t) - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} n_j(x)\delta_S(x)H(t) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{u_k n_i(x)\delta_S(x)\right\}H(t)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial \theta}{\partial x_j} H_S^-(x)H(t) - \theta(x,t)n_j(x)H(t)\delta_S(x)\,, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} H_S^-(x)H(t) + \theta(x,0)H_S^-(x)\delta(t)\,.$$

Тогда уравнения (2.1) в пространстве $D'_{N+1}\left(R^{N+1}\right)$ примут вид:

$$\hat{\sigma}_{ij},_j - \rho\ddot{\hat{u}}_i + \hat{F}_i + p_i(x,t)\delta_S(x)H(t) + C_{ij}^{kl}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(n_l(x)u_k(x,t)\,\delta_S(x)H(t)\right) + \\ + \rho\dot{u}_i^0(x)H_S^-(x)\delta(t) + \rho u_i^0(x)H_S^-(x)\delta'(t) = 0 \tag{3.2}$$

$$\Delta\hat{\theta} - k^{-1}\hat{\theta},_t + \hat{Q}(x,t) + q(x,t)\delta_S(x)H(t) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\theta n_j(x)\delta_S(x)\right\}H(t) + k^{-1}\theta^0(x)H_S^-(x)\delta(t) = 0. \tag{3.3}$$

Здесь C_{ij}^{kl} – тензор упругих констант, который для изотропной среды имеет вид:

$$C_{ij}^{kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \tag{3.4}$$

Из формул (3.2) и (3.3) видно, что краевые условия рассматриваемых задач вошли в эти уравнения в виде плотностей простых и двойных слоев на *S*, как поверхностные силы и тепловые источники, а начальные условия как импульсные, действующие в момент *t*=0. Заметим, что при дифференцировании мы учли условия на фронтах (1.9)-(1.1), которые обнуляют простые и двойные слои на фронтах ударных волн [7].

Далее построим обобщенные решения этих краевых задач при плоской деформации ($N = 2$).

4. Определение температурного поля при плоской деформации. Для определения температуры среды используем функцию Грина уравнения теплопроводности $(2.1)_2$, соответствующую импульсному сосредоточенному тепловому источнику $Q(x,t) = \delta(x)\delta(t)$ [11]:

$$U(x,t) = \frac{H(t)}{4\pi kt} e^{-\frac{\|x\|^2}{4kt}}\,. \tag{4.1}$$

Обобщенное решение (3.3) ищем в виде свертки функции Грина с действующими источниками в (3.3):

$$\hat{\theta}(x,t) =$$

$$= U * \left\{ q(x,t)\delta_S(x)H(t) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\theta_S n_j(x)\delta_S(x)\right)H(t)) + k^{-1}\theta^0(x)H_S^-(x)\delta(t) + \hat{Q} \right\} =$$

$$= U * q(x,t)\delta_S(x)H(t) + U,_j * \left\{\theta_S n_j(x)\delta_S(x)\right\} H(t) + U \underset{x}{*} \theta^0(x)H_S^-(x) + U * \hat{Q}$$

Здесь используем свойства дифференцирования свертки [12, 13]. Переменная под знаком свертки (*) означает, что берется неполная свертка только по этой переменной. Если такой символ отсутствует, то это полная свертка по (x,t).

Эту формулу для $\theta(x,t)$ можно представить в следующем интегральном виде:

$$H(t)H_s^-(x)\theta(x,t) =$$

$$= H(t)\int_0^t d\tau \int_S U(x-y,\tau)\, q(y,t-\tau)dS(y) - H(t)\int_0^t d\tau \int_S \frac{\partial U(x-y,\tau)}{\partial n(y)}\theta^S(y,t-\tau)dS(y) +$$

$$+\kappa^{-1}\int_{S^-} U(x-y,t)\theta^0(y)dV(y) + H(t)\int_0^t d\tau \int_{S^-} U(x-y,\tau)\, Q(y,t-\tau)dV(y), \tag{4.2}$$

где $dV(x) = dx_1 dx_2$, $dS(y)$ -дифференциал площади поверхности S.

Формула (4.2) позволяет по заданным значениям температуры и теплового потока на границе и начальной температуре определять температурное поле внутри области при действии различных тепловых источников.

Для $x\in S$, $t>0$ эта же формула дает сингулярное ГИУ для определения неизвестной температуры или теплового потока на границе:

$$2\pi\, \theta^S(x,t) =$$

$$= H(t)\int_S dS(y)\int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4k\tau}}\, q(y,t-\tau)}{2k\tau}\, d\tau - H(t)V.P.\int_S r\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4k\tau}}}{4k^2\tau^2}\theta^S(y,t-\tau)d\tau \tag{4.3}$$

$$+\frac{1}{2kt}\int_{S^-} e^{-\frac{r^2}{4k\tau}}\theta^0(y)dV(y) + H(t)\int_{S^-} dV(y)\int_0^t Q(y,t-\tau)\frac{e^{-\frac{r^2}{4k\tau}}}{2k\tau}d\tau.$$

Здесь $r = \left\|x-y\right\|$, $r,_j = \partial r / \partial y$.

Доказательство справедливости этой формулы для граничных точек можно провести в исходном пространстве-времени. Однако она непосредственно следует из ГИУ для трансформанты Лапласа температуры [6].

После решения этого уравнения на границе определяются неизвестные граничные функции поставленной краевой задачи. После этого по формуле (4.2) можно определить температуру во всей области S^- .

5. Обобщенное решение уравнений для перемещений и его регуляризация. Уравнение (4.2), с учетом закона Дюамеля-Неймана (1.2), можно записать в виде

$$L_{ij}^e(\partial_x,\partial_t)\hat{u}_i + \hat{G}_i + \rho^{-1}p_i\delta_S(x)H(t) + \rho^{-1}C_{ij}^{kl}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(n_l(x)u_k(x,t)\delta_S(x)H(t)\right) +$$

$$+\dot{u}_i^0(x)H_S^-(x)\delta(t) + u_i^0(x)H_S^-(x)\delta'(t) = 0 \tag{5.1}$$

где $L_{ij}^{e}(\partial_x, \partial_t)$ - дифференциальный оператор Ламе уравнений движения упругой среды:

$$L_{ij}^{e}(\partial_x, \partial_t) = \left(c_1^2 - c_2^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_i^j\left(c_2^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right), \quad i, j = 1, 2.$$

Для определения перемещений используем тензор Грина U_j^k этих уравнений, который удовлетворяет уравнениям Ламе:

$$L_{ij}^{e}(\partial_x, \partial_t)U_j^k + \delta_i^k\delta(x)\delta(t) = 0, \tag{5.1}$$

и условиям излучения:

$$U_j^k(x,t) = 0 \text{ при } t < 0 \text{ и при } \|x\| > c_1 t \tag{5.2}$$

При плоской деформации он выражается формулой [9]:

$$2\pi U_i^j(x,t) = (2r,_i r,_j - \delta_{ij})\frac{t^2}{r^2}\left(\frac{c_1 H(c_1 t - r)}{\sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} - \frac{c_2 H(c_2 t - r)}{\sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}}\right) +$$

$$+\left((\delta_{ij} - r,_i r,_j)\frac{H(c_1 t - r)}{c_1\sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} + r,_i r,_j \frac{H(c_2 t - r)}{c_2\sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}}\right), \quad r,_j = x_j / r, \ r = \|x\|. \tag{5.3}$$

Он обладает следующими свойствами симметрии:

$$U_i^j(x,t) = U_i^j(-x,t) = U_j^i(x,t).$$

Исследование асимптотических свойств этого тензора показало, что он имеет слабую особенность на волновых фронтах $r = c_i t$, не имеет сингулярностей при фиксированном $t>0$, $r \to 0$.

Используя свойства тензора Грина и свойства дифференцирования свертки [11], обобщенное решение (5.1) представим в виде тензорно-функциональной свертки:

$$\rho\hat{u}_i(x,t) = U_i^j * p_j(x,t)\delta_S(x)H(t) + C_{jm}^{kl}U_i^j,_m * n_l(x)u_k(x,t)\delta_S(x)H(t) +$$
$$+\rho U_i^j \underset{x}{*} \dot{u}_j^0(x)H_S^-(x) + \rho U_i^j,_t \underset{x}{*} u_j^0(x)H_S^-(x) + U_i^j * \hat{F}_j \tag{5.4}$$

Далее записать в интегральном виде соотношение (5.4) не удается, так как производные $U_i^j,_j(x,t)$ во втором слагаемом гиперсингулярны на волновых фронтах $r = c_i t$.

Для регуляризации формулы (5.2) введем первообразную по t тензора Грина $V = U * H(t)\delta(x)$:

$$2\pi V_j^i(x,t) = \delta_{ij}\sum_{k=1}^{2}\frac{H(c_k t - r)}{2c_k^2}\ln\left(\frac{c_k t + \sqrt{c_k^2 t^2 - r^2}}{r}\right) -$$
$$-\frac{(2r,_i r,_j - \delta_{ij})}{r^2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k H(c_k t - r)\frac{t}{c_k}\sqrt{c_k^2 t^2 - r^2}. \tag{5.5}$$

Особенности тензора $V_j^i(x,t)$ исследованы в [9]. Первообразная $V_j^i(x,t)$ имеет логарифмическую сингулярность при r=0 и непрерывна на волновых фронтах.

Используя $V_j^i(x,t)$ и правила дифференцирования свертки, второе слагаемое в соотношении (5.5) может быть представлено в регуляризованном виде:

$$C_{jm}^{kl}U_i^j,_m * n_l(x)u_k(x,t)\delta_S(x)H(t) =$$
$$= C_{jm}^{kl}V_i^j,_m * n_l(x)\dot{u}_k(x,t)\delta_S(x)H(t) + C_{jm}^{kl}V_i^j,_m \underset{x}{*} n_l(x)u_k^0(x)\delta_S(x)$$

В результате обобщенное решение (5.4) примет регуляризованный вид:

$$\rho\hat{u}_i(x,t) = U_i^j * p_j(x,t)\delta_S(x)H(t) + C_{jm}^{kl}V_i^j,_m * n_l(x)\dot{u}_k(x,t)\delta_S(x)H(t) +$$
$$+ C_{jm}^{kl}V_i^j,_m \underset{x}{*} n_l(x)u_k^0(x)\delta_S(x) + \tag{5.6}$$
$$+ \rho U_i^j \underset{x}{*} \dot{u}_j^0(x)H_S^-(x) + \rho U_i^j,_t \underset{x}{*} u_j^0(x)H_S^-(x) + U_i^j * \hat{F}_j,$$

который можно записать в интегральном виде. Для этого рассмотрим тензор напряжений и связанные с ним тензора.

6. **Фундаментальные тензоры напряжений. Регуляризация.** Введем следующие фундаментальные тензоры напряжений, порождаемые $U_i^j(x,t)$:

$$\Sigma_{ij}^k(x,t) = \lambda U_m^k,_m \delta_{ij} + \mu(U_i^k,_j + U_j^k,_i),$$
$$\Gamma_i^k(x,n,t) = \Sigma_{ij}^k n_j, \quad T_i^k(x,t,n) = -\Gamma_k^i(x,t,n). \tag{6.1}$$

Тензор $\Gamma_i^k(x,t,n)$ описывает напряжения на площадке с нормалью n, порожденные импульсными сосредоточенными силами в начале координат. Тензор $T_i^k(x,t,n)$ является решением уравнений Ламе при $\|x\| \neq 0$ и описывает перемещения среды при действии импульсного сосредоточенного источника мультипольного типа [15]. Он антисимметричен по x и n:

$$T_i^k(x,t,n) = -T_i^k(-x,t,n) = -T_i^k(x,t,-n)$$

Для интегрального представления формулы (5.6) введем первообразный по t тензор фундаментальные напряжений $W(x,t,n)$:

$$W_i^k(x,t,n) = C_{jm}^{kl}n_lV_i^j,_m = T_i^k(x,t,n) \underset{t}{*} H(t). \tag{6.2}$$

Этот тензор интегрируем на волновых фронтах и представим в виде:

$$W_i^k(x,t,n) = W_j^{id}(x,t,n) + T_j^{is}(x,n)H(t). \tag{6.3}$$

Динамический тензор $W_j^{id}(x,t,n)$ имеет слабую интегрируемую особенность на волновых фронтах.

Тензор $T_j^{iS}(x,n)$ - это тензор фундаментальных напряжений Грина статических уравнений Ламе. Он удовлетворяет однородным уравнениям Ламе при $x \neq 0$ и имеет только одну особенность при x=0:

$$T_j^{iS}(x,n) \sim K_{ij} / \|x\|, \ \|x\| \to 0,$$

где K_{ij} - ограничены.

Для него доказан аналог формулы Гаусса:

$$V.P.\int_S T_j^{is}(x-y,n(y))dS(y)=\rho H_s^-(x)\delta_j^i. \qquad (6.4)$$

Интеграл сингулярный только для граничных точек и берется в смысле главного значения.

7. Регулярное интегральное представление перемещений. Используя первообразный тензор фундаментальных напряжений (6.2) и свойства симметрии тензоров, обобщенное решение (5.6) можно записать в интегральном виде:

$$\rho\hat{u}_i(x,t)=H(t)\int_0^t d\tau\int_S\left\{U_i^j(y-x,\tau)p_j(y,t-\tau)-W_i^j(y-x,\tau,n(y))\dot{u}_k(y,t-\tau)\right\}dS(y)+$$

$$+H(t)\int_S W_i^j(y-x,t,n(y))u_k^0(y)dS(y)+\rho H(t)\int_{S^-}U_i^j(y-x,t)\dot{u}_j^0(y)dV(y)+ \qquad (7.1)$$

$$+\rho H(t)\partial_t\int_{S^-}U_i^j(y-x,t)u_j^0(y)dV(y)+U_i^j*\hat{F}_j,$$

Здесь для $x\notin S$ все интегралы регулярные со слабыми сингулярностями ядер на волновых фронтах. При известном температурном поле и граничным значениям перемещений и напряжений эти формулы позволяют определить перемещения в любой точке упругой среды при любых массовых силах, в том числе сингулярных, которые описывают воздействие сосредоточенных и импульсных силовых источников различного типа. В этом случае покомпонентную свертку $U_i^j*\hat{F}_j$ следует брать согласно правилам сверток в пространстве обобщенных функций.

Для решения краевых задач нужно определить перемещения или напряжения на границе S.

8. Разрешающие сингулярные интегральные уравнения. Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Решения начально-краевых задач 1-4 на границе области удовлетворяют граничным интегральным уравнениям:*

$$0,5\rho u_i(x,t)=$$

$$=\int_0^t d\tau\int_S\left\{U_i^j(y-x,\tau)p_j(y,t-\tau)-W_i^{jd}(y-x,\tau,n(y))\dot{u}_j(y,t-\tau)\right\}dS(y)$$

$$-V.P.\int_S T_i^{jS}(y-x^*,n(y))u_j(y,t)dS(y)+ \qquad (8.1)$$

$$+\int_{S^-}W_i^{jd}(y-x,t,n(y))u_k^0(y)dV(y)+\rho\int_{S^-}U_i^j(y-x,t)\dot{u}_j^0(y)dV(y)+$$

$$+\rho\partial_t\int_{S^-}U_i^j(y-x,t)u_j^0(y)dV(y)+U_i^j*\hat{F}_j,\quad i,j=1,2,$$

для $x\in S, t>0$.

После определения неизвестных граничных функций, по формулам (7.1) можно определить перемещения в любой точки области. После определения перемещений и температуры по формулам Дюамеля-Неймана (1.2) вычисляются напряжения в среде. Что решает поставленные начально краевые задачи.

Заключение. Построенные граничные интегральные уравнения (ГИУ) неклассического типа, резко отличаются от ГИУ краевых задач для эллиптических и параболических уравнений для решения которых хорошо разработаны различные математические методы. В частности, использование метода последовательных приближений здесь затруднено из-за наличия неизвестной скорости перемещений (для 1-ой и 2-ой краевых задач). Однако использование численных методов на основе метода граничного элемента позволяет достаточно эффективно решать такого типа уравнения.

Полученные формулы (4.2) и (7.1) имеют важное инженерное приложение. Они позволяют определить термонапряженное состояние среды по граничным значениям напряжений, перемещений, температуры и теплового потока, не решая ГИУ, так как для реальных инженерных задач эти характеристики процесса можно экспериментально измерить на границе. Более того, формулы позволяют рассчитать влияние каждой из этих характеристик процесса на его напряженно-деформированное состояние. Последнее очень важно при проектировании конструкций из термоупругих материалов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics// Journal Apply Physics. – 1956. - Vol.27. – №3. – P.240-253.

[2] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир, 1970 - 256 с.

[3] Данилевская В.И. О динамической задачи термоупругости// Прикладная математика и механика. - 1952. -Т.16. - №3. - С.341-344.

[4] Даниловская В.И. Приближенное решение задачи о стационарном температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы// Известие АН СССР. Отдел технических наук. - 1957. - №9. - С.157-158.

[5] Hetnarsri R.B. Encyclopedia of thermal stress. Springer (Dordrecht), 2014. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7

[6] Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Жанбырбаев Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах несвязанной термоэластодинамики //Прикладная математика и механика. - 1999. - Т.63. - №5. С.853-859.

[7] Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N. Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions//Journal American Institute of Physics Conference Proceeding. - 2017. - V. 1798. – P.020003-1-020003-8. Doi: 10.1063/1.4972595.

[8] Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва:Наука, 1976. - 664 с.

[9] Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: Наука, 1992. – 280 с.

[10] Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zakiryanova G.K., Zhanbyrbaev A.B. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics // Computational mechanics. – 1996. – Vol.18 . – P. 147–157.

[11] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1988. - 512 с.

[12] Дадаева АН, Айнакеева Н.Ж. Обобщенные решения краевых задач динамики термоупругих стержней// Вестник КазНИТУ, Алматы. - 2020. - №2. - С. 690-699.

[13] Алексеева Л.А. Аналоги формул Кирхгофа и Сомильяны в плоских задачах эластодинамики// ПММ, 1991, Т. 55 - №2. - С. 298-308.

[14] Алексеева Л.А. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса для решений волнового уравнения в $R^n \times t$.// Дифференциальные уравнения. – 1995. - Т.31. - №11. - С.1951-1953.

[15] Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Обобщенные решения краевых задач динамики деформируемых твердых тел. Монография. Алматы, 2020. 208 с.

REFERENCES

[1] Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics// Journal Apply Physics. – 1956. - Vol.27. – №3. – P.240-253.

[2] Novackij V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti. Moskva: Mir, 1970 - 256 s.

[3] Danilevskaja V.I. O dinamicheskoj zadachi termouprugosti// Prikladnaja matematika i mehanika. - 1952. -T.16. - №3. - S.341-344.

[4] Danilovskaja V.I. Priblizhennoe reshenie zadachi o stacionarnom temperaturnom pole v tonkoj obolochke proizvol'noj formy// Izvestie AN SSSR. Otdel tehnicheskih nauk. - 1957. - №9. - S.157-158.

[5] Hetnarsri R.B. Encyclopedia of thermal stress. Springer (Dordrecht), 2014. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7

[6] Alekseeva L.A., Dadaeva A.N., Zhanbyrbaev Metod granichnyh integral'nyh uravnenij v kraevyh zadachah nesvjazannoj termojelastodinamiki //Prikladnaja matematika i mehanika. - 1999. - T.63. - №5. S.853-859.

[7] Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N. Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions//Journal American Institute of Physics Conference Proceeding. - 2017. - V. 1798. – P.020003-1-020003-8. Doi: 10.1063/1.4972595.

[8] Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bashelejshvili M.O., Burchuladze T.V. Trehmernye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti i termouprugosti. Moskva:Nauka, 1976. - 664 s.

[9] Ajtaliev Sh.M., Alekseeva L.A., Dil'dabaev Sh.M., Zhanbyrbaev N.B. Metod granichnyh integral'nyh uravnenij v zadachah dinamiki uprugih mnogosvjaznyh tel. Alma-Ata: Nauka, 1992. – 280 s.

[10] Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zakiryanova G.K., Zhanbyrbaev A.B. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics // Computational mechanics. – 1996. – Vol.18 . – P. 147–157.

[11] Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki. - Moskva: Nauka, 1988. - 512 s.

[12] Dadaeva AN, Ajnakeeva N.Zh. Obobshhennye reshenija kraevyh zadach dinamiki termouprugih sterzhnej// Vestnik KazNITU, Almaty. - 2020. - №2. - S. 690-699.

[13] Alekseeva L.A. Analogi formul Kirhgofa i Somil'jany v ploskih zadachah jelastodinamiki// PMM, 1991, T. 55 - №2. - S. 298-308.

[14] Alekseeva L.A. Dinamicheskie analogi formul Grina, Gaussa dlja reshenij volnovogo uravnenija v $R^n \times t$. // Differencial'nye uravnenija. – 1995. - T.31. - №11. - S.1951-1953.

[15] Alekseeva L.A., Zakir'janova G.K. Obobshhennye reshenija kraevyh zadach dinamiki deformiruemyh tverdyh tel. Monografija. Almaty, 2020. 208 s.

[1]Л.А. Алексеева, [2]А.Н. Дадаева

[1]ҚР БжҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

[2]Satbayev University, Алматы, Қазақстан

e-mail: alexeeva@math.kz, dady1262@mail.ru

ЖАЛПЫ ФУНКЦИЯЛАР ӘДІСІ ШЕКТІ МАҢЫЗДЫ МӘСЕЛЕЛЕР БАЙЛАНЫСПАҒАН ТЕРМОЭЛАСТОДИНАМИКА

Андатпа. Жұпталмаған термоэластиканың стационарлық емес шеттік есептері қарастырылған. Шектік интегралды теңдеулер әдісі (ШИТӘ) бастапқы кеңістік уақытында жазықтық деформациясы кезіндегі термоэластиканың стационарлық емес шекаралық есептерін шешуге арналған. Жалпыланған функциялар әдісі негізінде жылулық теңдеу үшін Грин функциясын және Ақсақ теңдеулердің Грин тензорын пайдаланып, әртүрлі типтегі стационарлық емес қуат пен жылу көздерінің әсерінен шекаралық есептердің жалпыланған шешімдері салынады. Шектік есептерді шешудің интегралдық көріністері алынады. Бұл шешімдер белгілі қуаттылық пен жылу жүктемелерінің әсерінен ортаның термиялық кернеулі күйін анықтау үшін белгілі шекаралық мәндерді және бастапқы жағдайларды (орын ауыстырулар, температура, кернеулер және жылу ағыны) пайдалануға мүмкіндік береді. Шешуші интегралдық теңдеулер белгісіз шекаралық функцияларды анықтау үшін құрылады.

Негізгі сөздер: байланыссыз термоэлементтілік, іргелі шешімдер, орын ауыстырулар, температура, кернеулер, жылу ағыны, термоэластикалық соққы толқындары.

[1] L.A. Alexeyeva, [2] A.N. Dadayeva
[1]Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
e-mail: alexeeva@math.kz, dady1262@mail.ru

METHOD OF GENERALIZED FUNCTIONS ON PLANE BOUNDARY PROBLEMS UNCOUPLED THERMOELASTODYNAMICS

Abstract. Non-stationary boundary value problems of uncoupled thermoelasticity are considered. A method of boundary integral equations (BIME) in the initial space-time has been developed for solving non-stationary boundary value problems of thermoelasticity under plane deformation. On the basis of the method of generalized functions, generalized solutions of boundary value problems are constructed using the Green's function for the heat equation and the Green's tensor of the Lame equations under the action of non-stationary power and heat sources of various types. Integral representations of the solution of boundary value problems are obtained. These solutions allow, based on known boundary values and initial conditions (displacements, temperature, stresses and heat flux), to determine the thermally stressed state of the medium under the influence of various power and thermal loads. Resolving boundary integral equations are constructed to determine the unknown boundary functions.

Keywords: uncoupled thermoelasticity, fundamental solutions, displacements, temperature, stresses, heat flux, thermoelastic shock waves.